O Paradoxo de Bertrand para um Experimento Probabilístico Geométrico

Amarildo de Vicente[1]

[1]Colegiado do Curso de Matemática – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Caixa Postal 711 – 85.819-110 – Cascavel – PR – Brasil
amarildo@unioeste.br

Resumo. *Este trabalho apresenta uma discussão sobre um problema proposto por um matemático francês, Joseph Bertrand, conhecido como paradoxo de Bertrand. O problema consiste em obter a probabilidade para que uma corda gerada aleatoriamente em um círculo de raio r = 1 tenha um comprimento C ≥* $\sqrt{3}$. *Para este problema, três possíveis soluções distintas são apresentadas, o que a princípio parece contraditório. Todavia, o que se procura esclarecer é que tais soluções surgem por causa das diferentes interpretações feitas sobre o problema.*

Palavras chaves. *experimento geométrico, paradoxo de Bertrand, probabilidade.*

1. Introdução

Ao se analisar um experimento para produzir entes geométricos de forma randômica, a interpretação da palavra “randômica” pode conduzir a diferentes soluções, quando a assunto é probabilidade. Bertrand apresentou em 1907 um problema que comprova esta afirmação [LARSON, OLDONI, 1981]. O problema que ele propôs consiste em determinar a probabilidade de que uma corda randômica de um círculo de raio unitário tenha um comprimento C maior ou igual a $\sqrt{3}$. Este valor equivale às medidas dos lados de um triângulo equilátero inscrito no círculo citado, conforme pode ser visto na Figura 1 a seguir.

Embora este problema pareça a princípio apenas um quebra-cabeça matemático, ele tem diversas aplicações úteis. Em um contexto urbano, a circunferência do círculo pode ser interpretada como o lugar geométrico dos pontos por onde um helicóptero pode voar em um determinado espaço de tempo; o círculo pode ser visto como a região de alta poluição gerada por uma indústria; a corda pode representar ruas, estradas, redes de esgoto, rios, linhas de comunicação, estradas de ferro e assim por diante. A exigência de que a corda tenha pelo menos $\sqrt{3}$ unidades de comprimento pode se referir ao comprimento mínimo de um trecho da linha férrea que é apropriado como amostragem para que se faça uma vistoria; pode representar a extensão do efeito da poluição gerada pela fábrica, etc.

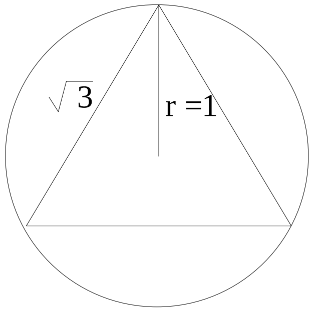

Figura 1

2. Análise do problema

É possível apresentar três soluções aceitáveis para que se atenda aos propósitos do problema, conforme as análises feitas a seguir.

2.1. Análise da corda por meio de suas extremidades sobre a circunferência

Qualquer corda pode ser unicamente determinada pela interseção de seus pontos terminais com a circunferência. Suponhamos que, para gerar a corda, seja primeiramente produzido um deles, que será chamado origem e denotado por A, e depois o outro, que será denominado de extremidade e denotado por B. Suponhamos que estes pontos sejam gerados de forma aleatória e uniformemente distribuídos sobre a circunferência. Suponhamos que, ao gerar uma corda, um dos vértices de um triângulo equilátero inscrito no círculo esteja no ponto A (ver Figura 2).

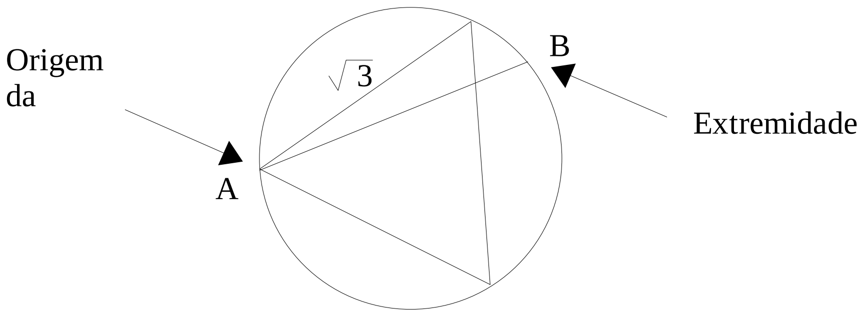

Figura 2

Para que esta corda tenha um comprimento mínimo de $\sqrt{3}$ unidades de comprimento, o ponto B deve cair no arco que liga os outros dois vértices do triângulo. Este arco equivale à terça parte da circunferência. Assim, a probabilidade de que isso ocorra é 1/3.

2.2. Análise da corda por meio do ponto de interseção com uma reta fixada, passando pela origem do círculo

O comprimento de qualquer corda depende de sua distância ao centro do círculo e não de sua direção. Podemos portanto assumir que elas serão geradas perpendicularmente a uma reta fixada, passando pelo centro do círculo. É claro então para gerar cordas randômicas basta gerar seus pontos de interseção com a reta citada. Vamos assumir que estes pontos sejam gerados de maneira uniforme em [0, 1]. Para uma corda ter um comprimento mínimo de $\sqrt{3}$ unidades de comprimento, a distância do ponto de interseção desta corda com a reta até o centro do círculo deve ser menor ou igual a 1/2, que é a metade do raio. Deste modo, a probabilidade de que isto ocorra é 1/2.

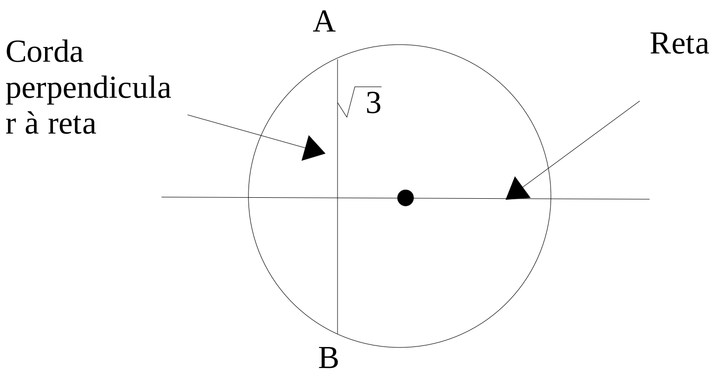

Figura 3

2.3. Análise da corda por meio do ponto de interseção com uma linha qualquer perpendicular à circunferência, passando pelo centro do círculo

Qualquer corda é unicamente determinada pelo seu ponto de interseção com uma linha perpendicular que passa pelo centro do círculo. Suponhamos que estes pontos de interseção sejam gerados de modo uniforme em todo o círculo (ver Figura 4).

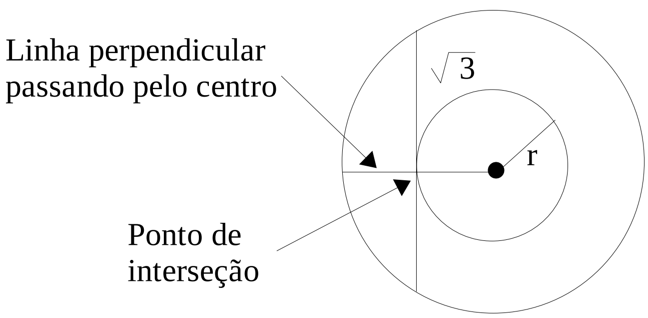

Figura 4

Assim, a probabilidade p de que esta interseção esteja a uma distância r do centro do círculo é dada pelo quociente entre a área do círculo de raio r e a área do círculo de raio 1, ou seja, $p = \dfrac{\pi r^2}{\pi 1^2} = r^2$. Para que a corda tenha comprimento mínimo $\sqrt{3}$, seu ponto de interseção com a reta deve estar em um circunferência de raio r = 1/2 e a probabilidade de que isso ocorra é $r^2 = 1/4$.

3. Uma visão mais formal do problema

É importante frisar que as três soluções estão corretas, mas os experimentos analisados em caso são distintos. Um experimento é caraterizado pelo espaço amostral produzido e pela distribuição de probabilidade associada a este experimento. No caso em estudo, ver seção 1, cada segmento (corda) tem origem em A, o primeiro ponto escolhido ou gerado, e extremidade em B, o segundo ponto gerado. Seja um sistema ortogonal xOy fixado e θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a medida do ângulo entre o eixo x positivo e uma corda gerada, sendo a origem do sistema posicionado no ponto A (Figura 5).

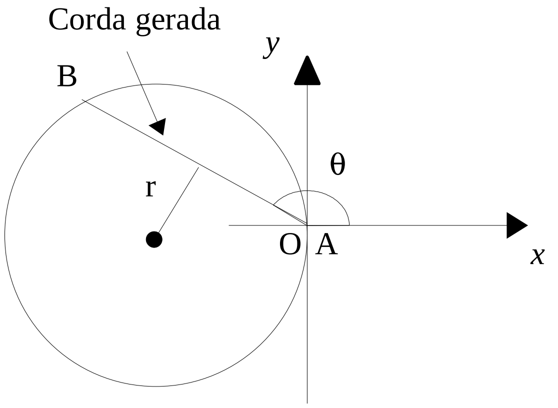

Figura 5

Sendo r a distância da corda gerada até o centro do círculo, $0 \leq r \leq 1$, então qualquer uma delas fica unicamente determinada quanto conhecemos r e θ. Assim, o espaço amostral E para os três casos analisados é o conjunto de todos pontos do retângulo E = [0, 1]x[0, 2π], ver Figura 6.

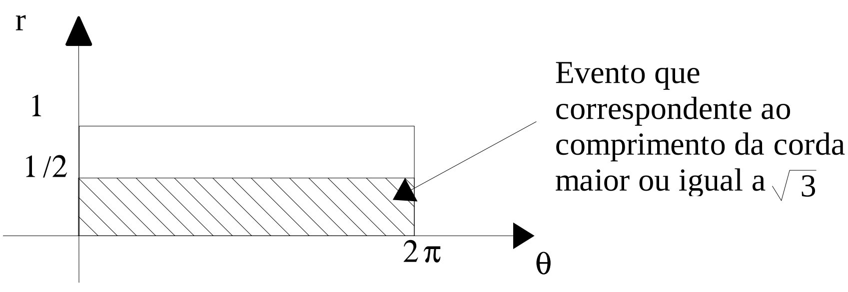

Figura 6

Uma vez que tal espaço amostral é único, o que difere são as funções de distribuição de probabilidade (fdp) para cada experimento. Para reanalisar cada caso, sejam R e Θ duas variáveis aleatórias que assumem valores r e θ, respectivamente. Seja $f_{R,\Theta}(r, \theta)$ a fdp conjunta de R e Θ sobre o espaçao amostral E. Devido à simetria da circunferência, pode-se concluir sem maiores dificuldades que Θ é uniformemente distribuída ente em [0, 2π]. Além disso, conhecer o valor de Θ não ajuda em nada a descobrir o valor de R, o que permite concluir que R e Θ são vaiáveis aleatórias independentes, [BUSSAB, MORETTIN, 2001]. Deste modo, a fdp conjunta $f_{R,\Theta}$ (r, θ) pode ser expressa como um produto das funções de densidade de probabilidades individuais marginais de R e Θ, isto é,

$$f_{R,\Theta}(r,\theta)=f_R(r)\,f_\Theta(\theta)=\frac{1}{2\pi}\,f_R(r).$$

O último membro da igualdade se dever ao fato de Θ ser uniformemente distribuída em [0, 2π]. A próxima tarefa consiste em encontrar a fdp marginal para R. Ela é diferente para cada um dos três experimentos.

3.1. Primeiro caso (Análise da corda por meio de suas extremidades sobre a circunferência)

Notemos que para o comprimento de uma corda ser randômico, basta que apenas uma das extremidades seja gerada de forma aleatória. Deste modo, vamos fixar uma das extremidades, A, sobre um determinado ponto da circunferência, e produzir a outra, B, de forma aleatória, e uniformemente distribuída sobre a circunferência, ver Figura 6.

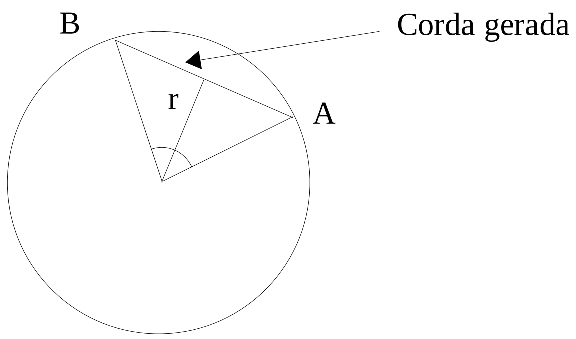

Figura 7

Sejam A e B os pontos de interseção da corda com a circunferência e ϕ, $0 \leq \phi \leq \pi$, a medida do ângulo AÔB, onde O é o centro do círculo. Sejam ainda r, a distância da corda até o centro do círculo, e Φ uma variável aleatória que assume valores ϕ. Note-se que $0 \leq \phi \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \phi/2 \leq \pi/2$. Além disso, Φ é uma variável aleatória cujos valores são uniformemente distribuídos em [0, π]. Para encontrarmos a fdp de R, analisemos o seguinte:

$r = \cos(\phi/2) \Leftrightarrow \phi/2 = \cos^{-1} r$.

Daí,

$f_R(r) \equiv P(R \leq r) = P(\cos(\phi/2) \leq r) = P(\phi/2 \geq \cos^{-1} r)$.

A inversão do sinal da última desigualdade se deve ao fato de que $\cos^{-1} r$ é decrescente. Da última igualdade temos:

$f_R(r) \equiv 1 - P(\phi/2 \leq \cos^{-1} r) = P(\phi \leq 2\cos^{-1} r) = 1 - F_\Phi(2\cos^{-1} r)$,

onde $F_\Phi(r)$ é a função de probabilidade acumulada (fda) de Φ. Como Φ é uniformemente distribuída em $[0, \pi]$, então sua fda é dada por

$$F_\Phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & se \quad 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 & em \quad caso \quad contário \end{cases}$$

Assim, sendo $F_R(r)$ a fda de R, então

$$F_R(r) = 1 - \int_0^{2\cos^{-1} r} d\phi = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} r.$$

Agora, derivando em relação a r obtemos a fdp de R, isto é,

$$f_R(r) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-r^2}} \quad 0 \leq r \leq 1$$

Logo, a fdp conjunta para R e Φ sobre o espaço amostral citado é

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\pi\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-r^2}} \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

A probabilidade *p* de que uma corda randômica exceda $\sqrt{3}$ unidades de comprimento é igual à integral de $f_{R,\Phi}(r, \theta)$ no espaço amostral E correspondendo ao evento $R \leq 1/2$. Assim,

$$p = P(corda \geq \sqrt{3}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \frac{1}{\pi^2\sqrt{1-r^2}} dr\, d\theta = 1/3,$$

conforme já havia sido apresentado na seção 1.

Nota: Este resultado pode ser obtido de modo mais simples diretamente da fda de R, isto é,

$$p = F_R\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{1}{2} \quad .$$

3.2. Segundo caso (Análise da corda por meio do ponto de interseção com uma reta fixada, passando pela origem do círculo)

Neste caso R é uniformemente distribuída em [0, 1]. Assim,

$$f_R(r) = \begin{cases} 1 & se \quad 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & em \quad caso \quad contário \end{cases}$$

Daí,

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Deste modo,

$$p = P(corda \geq \sqrt{3}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \frac{1}{2\pi} dr\, d\theta = 1/2.$$

Este resultado coincide com aquele apresentado na seção 2 e pode ser obtido diretamente da fda de R, isto é, p = $F_R(1/2)$.

3.3. Terceiro caso (Análise da corda por meio do ponto de interseção com uma linha qualquer perpendicular à circunferência, passando pelo centro do círculo).

Neste caso, os pontos de interseção das cordas geradas com uma reta perpendicular passando pelo centro do círculo são uniformemente distribuídos sobre o círculo. Assim,

$$F_R(r) \;=\; P(R \leq r) \;=\; \frac{\text{Área do círculo de raio } r}{\text{Área do círculo de raio } 1} \;=\; r^2.$$

Logo, $F_R(r) \;=\; \frac{d}{dr} F_R(r) \;=\; 2\mathrm{r}.$

Daí, a fdp conjunta de R e Θ sobre o espaço amostral E é

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) \;=\; \frac{2\mathrm{r}}{2}\pi = \frac{r}{\pi}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Portanto,

$$P(corda \geq \sqrt{3}) \;=\; P(R \leq \frac{1}{2}) \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^{1/2} \frac{r}{\pi}\, drd\,\theta \;= \frac{1}{4}.$$

4. Conclusão

A unicidade da solução de um problema é um fato importante quando o assunto é matemática. Por este motivo, quando se fala em um experimento probabilístico envolvendo elementos geométricos, é preciso ter cuidado com a análise dos resultados obtidos neste experimento pois eles podem depender de sua interpretação.

5. Referências Bibliográficas

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. Estatística Básica, 5a. Edição, Editora Atual, 2001. 320 p.

LARSON, R. C.; OLDONI, A. R. Urbans Operations Research. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1981. 572 p.