

**1ª Prova de Análise Real**  
Matemática - 4º ano - 00/00/2023

Nome: \_\_\_\_\_

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: \_\_\_\_\_  
Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso  $\frac{100}{6} \approx 16,67$ .

---

**1.** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos arbitrários. Mostre as leis distributivas,

a)  $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ ,

b)  $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ .

---

**2.** Considere a função

$$f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Mostre que  $f$  é bijetora e obtenha a expressão para a inversa  $f^{-1}$ .

---

**3.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Mostre que  $f(X) - f(A) \subset f(X - A)$ , para qualquer  $A \subset X$ . Dê um contraexemplo para mostrar que a inclusão contrária não é válida.

---

**4.** Seja  $X$  um conjunto finito. Então

i) se existir uma função injetora  $f : X \rightarrow X$ , mostre que  $f$  é também sobrejetora;

ii) se existir uma função sobrejetora  $g : X \rightarrow X$ , mostre que  $g$  é também injetora.

---

**5.** Sejam  $X$  um conjunto não enumerável,  $Y$  um conjunto infinito enumerável e  $Z$  um conjunto finito. Classifique em verdadeiro ou falso as afirmações (justificando adequadamente):

a)  $X - Y$  é não enumerável.

c)  $(X \cap Y) - Z$  é finito.

b)  $Z - (X \cup Y)$  é não enumerável.

d)  $Y \cup Z$  é enumerável.

---

**6.** Sejam  $X$  um conjunto infinito e  $Y$  um conjunto finito. Mostre que existe uma função sobrejetiva  $f : X \rightarrow Y$  e uma função injetiva  $g : Y \rightarrow X$ .