3^a Lista de exercícios de Análise Real

1. Suponha $f : I_m \to I_n$ uma bijeção. Mostre que $m = n$.

2. Suponha que existem bijeções $f : I_m \to X$ e $g : I_n \to X$. Mostre que $m = n$.

3. Seja $f : X \to Y$ uma função injetora e suponha que Y é finito. Mostre que X é também finito, e além disso, o número de elementos de X é menor ou igual do que o número de elementos de Y.

4. Seja $f : X \to Y$ uma função sobrejetora e suponha que X é finito. Mostre que Y é também finito, e além disso, o número de elementos de Y é menor ou igual do que o número de elementos de X.

5. Seja X um conjunto infinito e Y um conjunto finito. Mostre que existe uma função sobrejetiva $f : X \to Y$ e uma função injetiva $g : Y \to X$.

6. Prove que se um conjunto A é finito e possui n elementos, então o conjunto $\mathcal{P}(A)$ possui 2^n elementos.

7. Defina uma função sobrejetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de forma que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $A_n = \{k \in \mathbb{N}; \quad f(k) = n\}$ seja infinito.

8. Mostre que X é infinito se e somente se existe uma aplicação injetora $f : \mathbb{N} \to X$.

9. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1)$. Prove que f é uma bijeção.

10. Neste exercício, mostraremos que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}; \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{Z}^*\}$ é enumerável.

a) Mostre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

b) Mostre que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável.

c) Mostre que se X e Y são enumeráveis então $X \times Y$ é enumerável.

d) Conclua que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável e que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

11. Dados quaisquer dois intervalos (fechados) da reta $[a, b]$ e $[m, n]$, mostre que existe uma bijeção $f : [a, b] \to [m, n]$.

12. Mostre que os intervalos da reta $[0, 1]$ e $(0, 1)$ possuem a mesma cardinalidade, isto é, obtenha uma função bijetora $f : [0, 1] \to (0, 1)$.

13. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to X$ uma função injetiva, e não sobrejetiva. Mostre que X possui um subconjunto infinito enumerável (e portanto X é ele próprio infinito).
Sugestão: Tome $x \in X - Im(f)$ e prove que os elementos $x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots,$ são dois a dois distintos.