Solução da 3^a Prova de Variáveis Complexas

Matemática - 4^o ano - 12/08/2025

---

1. Usando as definições das funções elementares, calcule os números complexos

i) $e^{\pi i}$;

ii) $\cos(\pi)$;

iii) $\operatorname{sen}(i)$;

iv) $\ln(i)$.

Solução: Para o item (i) temos que $e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ e então

$$e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = 1 \cdot (-1 + 0i) = -1.$$

Para o item (ii) temos que $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ e então

$$\cos(\pi) = \cos(\pi + 0 \cdot i) = \cos \pi \cosh 0 - i \operatorname{sen} \pi \operatorname{senh} 0 = (-1) \cdot 1 - i \cdot 0 \cdot 0 = -1.$$

Para (iii), como $\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$, então

$$\operatorname{sen}(i) = \operatorname{sen}(0 + 1 \cdot i) = \operatorname{sen} 0 \cosh 1 + i \cos 0 \operatorname{senh} 1 = 0 \cdot \cosh 1 + i \cdot 1 \cdot \operatorname{senh} 1 = i \operatorname{senh} 1.$$

Para o item (iv), temos que o logaritmo é uma função multivalente com $\ln z = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi)$ para $k \in \mathbb{Z}$, sendo $\rho = |z|$ e $\theta = \operatorname{Arg}(z)$. Como $z = i$, então $\rho = |z| = 1$ e $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ e desta forma,

$$\ln(i) = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\frac{\pi(4k+1)}{2},$$

para $k \in \mathbb{Z}$. ∎

---

2. Mostre que $e^{z+w} = e^z e^w$ para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$.

Solução: Sejam $z = a + bi$ e $w = u + vi$ números complexos arbitrários. Então

$$\begin{aligned}
e^{z+w} &= e^{(a+bi)+(u+vi)} = e^{(a+u)+i(b+v)} \\
&= e^{a+u}(\cos(b+v) + i \operatorname{sen}(b+v)) \\
&= e^a e^u(\cos b \cos v - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} v + i \operatorname{sen} b \cos v + i \operatorname{sen} v \cos b) \\
&= e^a e^u(\cos b \cos v + i^2 \operatorname{sen} b \operatorname{sen} v + i \operatorname{sen} b \cos v + i \operatorname{sen} v \cos b) \\
&= e^a e^u(\cos b + i \operatorname{sen} b)(\cos v + i \operatorname{sen} v) \\
&= e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v) = e^{a+bi}e^{u+iv} = e^z e^w.
\end{aligned}$$

∎

---

3. Determine todas as soluções complexas da equação $\operatorname{sen} z = 0$.

Solução: Considerando $z = x + yi$, reescrevemos a equação na forma

$$\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y = \operatorname{sen}(x + yi) = \operatorname{sen} z = 0,$$

e da igualdade de números complexos,

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \cosh y = 0 \\ \cos x \operatorname{senh} y = 0. \end{cases}$$

Como $\cosh y \neq 0$ qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$ a primeira equação nos dá $\operatorname{sen} x = 0$ e portanto $x = k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Porém para todo $k \in \mathbb{Z}$ temos que $\cos x = \cos(k\pi) \neq 0$ donde temos que obrigatoriamente $\operatorname{senh} y = 0$ e portanto $y = 0$. Logo, as soluções complexas da equação $\operatorname{sen} z = 0$ são

$$z = x + yi = k\pi + 0i = k\pi,$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. ■

---

4. Mostre que a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) = \cos z \end{aligned}$$

é derivável em todo $z \in \mathbb{C}$ e alem disso, $f'(z) = -\operatorname{sen} z$.

Solução: Supondo $z = x + iy$, como $f(z) = \cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ então temos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ com $u(x, y) = \cos x \cosh y$ e $v(x, y) = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$. Nestes termos para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\operatorname{sen} x \cosh y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \operatorname{senh} y = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Segue que as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e portanto a função f é derivável para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e além disso,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= -\operatorname{sen} x \cosh y + i(-\cos x \operatorname{senh} y) \\ &= -(\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y) = -\operatorname{sen}(x + iy) = -\operatorname{sen} z. \end{aligned}$$

■

5. Determine o valor da integral

$$\int_C z + (1-i)dz$$

em que C é o segmento de reta orientado de $z = 0$ a $z = 1 + 2i$.

Solução: Primeiro vamos parametrizar o caminho C colocando

$$C = \{(t, 2t); \quad t \in [0,1]\}.$$

Nestes termos, o número complexo $z(t) = x(t) + iy(t) = t + 2ti$ percorre todo o caminho C de $z = 0$ a $z = 1 + 2i$ quando $t \in [0,1]$. Então

$$\begin{aligned}
\int_C z + (1-i)dz &= \int_0^1 (x(t) + iy(t) + (1-i)) \left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right) dt \\
&= \int_0^1 ((t+1) + i(2t-1))(1+2i)dt \\
&= \int_0^1 (t + 1 - 4t + 2) + i(2t + 2 + 2t - 1)dt \\
&= \int_0^1 (-3t + 3) + i(4t + 1)dt \\
&= \int_0^1 -3t + 3dt + i\int_0^1 4t + 1dt \\
&= \left[-\frac{3t^2}{2} + 3t\right]_{t=0}^{t=1} + i\left[2t^2 + t\right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{3}{2} + 3 + i(2+1) = \frac{3}{2} + 3i.
\end{aligned}$$

■

---

6. Use a Fórmula Integral de Cauchy para determinar o valor da integral

$$\int_C \frac{z^2}{z^2 + 4} dz$$

em que C é o círculo de centro i e raio 2, orientado no sentido anti-horário.

Solução: Consideremos primeiro que

$$\frac{z^2}{z^2+4} = \frac{z^2}{(z+2i)(z-2i)},$$

e que o ponto $2i$ é o único ponto em que o integrando não é derivável. Nestes termos escrevemos

$$\int_C \frac{z^2}{z^2+4}dz = \int_C \frac{z^2}{(z+2i)(z-2i)}dz = \int_C \frac{\frac{z^2}{(z+2i)}}{(z-2i)}dz,$$

em que C é um círculo de centro i e raio 2 orientado no sentido anti-horário. Como $\frac{z^2}{(z+2i)}$ é agora derivável em todos os pontos do interior de C, da fórmula integral de Cauchy,

$$\int_C \frac{\frac{z^2}{(z+2i)}}{(z-2i)}dz = 2\pi i \frac{(2i)^2}{(2i+2i)} = 2\pi i \frac{-4}{4i} = -2\pi.$$

■