Solução da 1^a Prova de Variáveis Complexas

Matemática - 4^o ano - 03/06/2025

---

1. Calcule
$$\left|\frac{1-2i}{1+i}+\frac{2-i}{1-i}\right|.$$

Solução: Existem muitas manipulações algébricas que podem ser realizadas. Uma das mais simples é juntas as frações (tirando o mínimo múltiplo comum). Temos então que
$$\begin{aligned}\left|\frac{1-2i}{1+i}+\frac{2-i}{1-i}\right| &= \left|\frac{(1-2i)(1-i)+(2-i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}\right| \\ &= \left|\frac{1-2i-i-2+2-i+2i+1}{(1+i-i+1)}\right| \\ &= \left|\frac{2-2i}{2}\right| = |1-i| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

■

---

2. Mostre que o conjunto dos números complexos não possui divisores próprios de zero, isto é, se $zw=0$ então $z=0$ ou $w=0$.

Solução: Suponha que $z=a+bi$ e $w=c+di$ e que além disso, $zw=(a+bi)(c+di)=0$. Para provar que um dos números z ou w é igual a zero, suponha que um deles não seja nulo, e neste caso provaremos que o outro é obrigatoriamente nulo. Suponha que $z=a+bi\neq 0$. Lembremos que
$$a+bi=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a=0 \quad \text{e} \quad b=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a^2+b^2=0.$$

Desta forma, como $z=a+bi\neq 0$ então $a^2+b^2\neq 0$. Também da hipótese $zw=(a+bi)(c+di)=0$, temos que
$$(ac-bd)+i(ad+bc)=(a+bi)(c+di)=0,$$
donde
$$\begin{cases} ac-bd=0 \\ bc+ad=0. \end{cases}$$

Para resolver este sistema em c e d (considerando a e b coeficientes) multiplicamos a primeira equação por a e segunda equação por b, obtendo
$$\begin{cases} a^2c-abd=0 \\ b^2c+abd=0, \end{cases}$$
e somando as duas equações vem $(a^2+b^2)c=0$ e como $a^2+b^2\neq 0$, segue que $c=0$. Da mesma forma, multiplicando a primeira equação do sistema por $-b$ e a segunda por a obtemos
$$\begin{cases} -abc+b^2d=0 \\ abc+a^2d=0, \end{cases}$$

e somando as duas equações vem $(a^2+b^2)d = 0$ e como $a^2+b^2 \neq 0$, segue que $d = 0$. Sendo assim temos que $c = d = 0$ donde $w = c + di = 0$, como desejado. ∎

---

3. Considere θ um número real (arbitrário). Calcule $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2$, usando a Fórmula de DeMoivre e o produto de um número complexo por ele mesmo. Usando estas duas formas de cálculo deste quadrado, mostre que

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sen}(2\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta.$$

Solução: Usando a fórmula de DeMoivre temos que

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta),$$

e fazendo o produto de números complexos temos que

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) + i(2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta).$$

Desta forma,

$$\cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta) = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 = (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta) + i(2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta),$$

e sabendo que dois números complexos são iguais se e somente se suas partes reais e imaginárias são iguais, então segue que obrigatoriamente,

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\,\theta,$$

e

$$\mathrm{sen}(2\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta,$$

como desejado. ∎

---

4. Prove a igualdade $|\overline{z} - z|^2 + |\overline{z} + z|^2 = 4|z|^2$, válida para qualquer número complexo z.

Solução: **Modo 1: (Usando a propriedade $|z|^2 = z\overline{z}$)** Seja $z \in \mathbb{C}$ arbitrário. Então

$$\begin{aligned}
|\overline{z} - z|^2 + |\overline{z} + z|^2 &= (\overline{z} - z)(\overline{\overline{z} - z}) + (\overline{z} + z)(\overline{\overline{z} + z}) \\
&= (\overline{z} - z)(\overline{\overline{z}} - \overline{z}) + (\overline{z} + z)(\overline{\overline{z}} + \overline{z}) \\
&= (\overline{z} - z)(z - \overline{z}) + (\overline{z} + z)(z + \overline{z}) \\
&= \overline{z}z - \overline{z}^2 - z^2 + z\overline{z} + \overline{z}z + \overline{z}^2 + z^2 + z\overline{z} \\
&= \overline{z}z + z\overline{z} + \overline{z}z + z\overline{z} = |z|^2 + |z|^2 + |z|^2 + |z|^2 = 4|z|^2.
\end{aligned}$$

Modo 2: (Substituindo $z = a + bi$) Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$ arbitrário. Então

$$|\overline{z} - z|^2 + |\overline{z} + z|^2 = |(a - bi) - (a + bi)|^2 + |(a - bi) + (a + bi)|^2$$

$$= |-2bi|^2 + |2a|^2$$
$$= 4b^2 + 4a^2 = 4(a^2+b^2) = 4|z|^2.$$

■

---

5. Determine um inteiro positivo n que satisfaz

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n = 1.$$

Solução: Convertendo $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e 1 em coordenadas polares obtemos

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \cos(135^\circ) + i\,\mathrm{sen}(135^\circ),$$

e também

$$1 = \cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0 = \cos(2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(2k\pi) = \cos(k\cdot 360^\circ) + i\,\mathrm{sen}(k\cdot 360^\circ).$$

Desta forma (trabalhando em radianos), procuramos um valor de n de forma que

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n = \cos\frac{3n\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3n\pi}{4} = \cos(2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(2k\pi),$$

isto é, um valor de n de forma que $\frac{3n\pi}{4}$ represente k voltas completas em torno da origem. Colocando

$$\frac{3n\pi}{4} = 2k\pi,$$

temos que $3n = 8k$ e a igualdade fica trivialmente válida se colocarmos $n = 8$ e $k = 3$ voltas. Checando, se $n = 8$, temos que

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8 = \cos\frac{24\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{24\pi}{4} = \cos(6\pi) + i\,\mathrm{sen}(6\pi) = 1 + 0i = 1.$$

Da mesma forma (trabalhando em graus) procuramos um valor de n de forma que

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^n = \cos(n\cdot 135^\circ) + i\,\mathrm{sen}(n\cdot 135^\circ) = \cos(k\cdot 360^\circ) + i\,\mathrm{sen}(k\cdot 360^\circ),$$

isto é, procuramos um valor de n de forma que $n\cdot 135^\circ$ represente k voltas completas em torno da origem. Colocando

$$n\cdot 135^\circ = k\cdot 360^\circ,$$

e como $135^\circ = 3\cdot 45^\circ$ e $360^\circ = 8\cdot 45^\circ$ temos

$$3n\cdot 45^\circ = 8k\cdot 45^\circ,$$

temos que $3n = 8k$ e a igualdade fica trivialmente válida se colocarmos $n = 8$ e $k = 3$ voltas. Checando, se $n = 8$, temos que

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8 = \cos(8 \cdot 135^\circ) + i \operatorname{sen}(8 \cdot 135^\circ) = \cos(3 \cdot 360^\circ) + i \operatorname{sen}(3 \cdot 360^\circ) = 1 + 0i = 1.$$

$\blacksquare$

---

6. Determine todas as soluções da equação $w^6 = 1$ no conjunto dos números complexos.

Solução: As soluções da equação $w^6 = 1$ são os números complexos w dados por $w = \sqrt[6]{1}$, isto é, as 6 raízes complexas do número $z = 1$. Como

$$1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0),$$

então as 6 raízes complexas de $z = 1$ são

$$w = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{0 + 2k\pi}{6}\right) = \cos\frac{k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{k\pi}{3},$$

para $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Desta forma, considerando os valores de $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ temos

$$\begin{aligned}
w_1 &= \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1,\\
w_2 &= \cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
w_3 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
w_4 &= \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1,\\
w_5 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
w_6 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

As seis soluções da equação $w^6 = 1$ são os seis números w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 e w_6. $\blacksquare$