1ª Prova de Variáveis Complexas

Matemática - 4º ano - 03/06/2025

Nome: _____

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: _____

Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

1. Calcule

$$\left| \frac{1-2i}{1+i} + \frac{2-i}{1-i} \right|.$$

2. Mostre que o conjunto dos números complexos não possui divisores próprios de zero, isto é, se $zw = 0$ então $z = 0$ ou $w = 0$.

3. Considere θ um número real (arbitrário). Calcule $(\cos \theta + i \sin \theta)^2$, usando a Fórmula de DeMoivre e o produto de um número complexo por ele mesmo. Usando estas duas formas de cálculo deste quadrado, mostre que

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{e} \quad \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

4. Prove a igualdade $|\bar{z} - z|^2 + |\bar{z} + z|^2 = 4|z|^2$, válida para qualquer número complexo z .

5. Determine um inteiro positivo n que satisfaz

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^n = 1.$$

6. Determine todas as soluções da equação $w^6 = 1$ no conjunto dos números complexos.