Segunda demonstração de Teorema

Neste texto vamos apresentar uma segunda demonstração do Teorema que afirma que a imagem de uma função contínua definida em um compacto é compacto. Para esta demonstração provaremos que o conjunto imagem $f(X)$ é fechado e limitado.

Teorema 1 *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e X um compacto. Então $Im(f) = f(X)$ é compacto.*

Prova Primeiro vamos provar que $f(X)$ é fechado. Para isso, seja $y \in \overline{f(X)}$, isto é, y é ponto aderente do conjunto $f(X)$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, da definição de ponto aderente, $(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}) \cap f(X) \neq \emptyset$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in f(X)$ de forma que $|y_n - y| < \frac{1}{n}$. Desta forma, existe uma sequência (y_n) de pontos de $f(X)$ com $y_n \to y$. Mas então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ de forma que $y_n = f(x_n)$. A sequência (x_n) é portanto uma sequência de pontos de X e sendo X compacto, esta sequência admite uma subsequência (x_{n_j}) convergente. Seja x o limite desta subsequência e portanto $x \in \overline{X}$. Como X é fechado, então $x \in X$. Da continuidade de f em $x \in X$, segue que $f(x_{n_j}) \to f(x)$. Mas também $f(x_{n_j}) = y_{n_j} \to y$ e da unicidade do limite temos que $y = f(x)$, para algum $x \in X$, provando que $y \in f(X)$. Segue que $f(X)$ é fechado.

Agora provaremos que $f(X)$ é limitado. Suponha por contradição que $f(X)$ não seja limitado. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in f(X)$ de forma que $y_n > n$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ de forma que $f(x_n) = y_n > n$. Como X é compacto, a sequência (x_n) admite uma subsequência (x_{n_j}) convergente. Seja x o limite da subsequência. Desta forma, $x \in \overline{X}$ e como X é fechado, $x \in X$. Da continuidade de f em $x \in X$, a sequência $f(x_{n_j})$ também converge. Isso contradiz a desigualdade $f(x_{n_j}) > n_j$ quando $j \to \infty$. ∎