Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 1**, 1 (2017): 44–98. ©Jeepema – ISSN 2594-6323
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Funções elementares no conjunto dos quatérnios: Abordagem por série de potências

Sandro Marcos Guzzo –Email: smguzzo@gmail.com & Naísa Camila Garcia Tosti (Unioste-Pr)

Resumo: Os números quatérnios possuem muitas aplicações, em particular, na computação gráfica para descrever movimentos tridimensionais. Neste trabalho estamos interessados na construção deste conjunto e em suas propriedades. Vamos apresentar o conjunto dos quatérnios, provar as principais propriedades das operações de adição e multiplicação, e apresentar uma construção para algumas funções elementares a valores quatérnios.

Palavras-chave: Quatérnios. Números Complexos. [*]

Sumário

* Publicado em 14-08-2017.

1. Introdução

Os números complexos, surgiram da necessidade de se determinar raízes de equações do segundo grau do tipo $x^2 + 1 = 0$, pois, não existe número real x que satisfaça esta igualdade. Depois de construído o conjunto dos números complexos, eles se tornaram um excelente método para resolver problemas em diversas áreas. Estes números se tornaram muito úteis nas rotações e reflexões no plano. Então, uma pergunta natural surge: É possível construir um novo conjunto numérico que ofereça propriedades similares às dos complexos no plano, para o espaço?

Hamilton, aceitou o desafio, e inicialmente buscou desenvolver uma álgebra para tripletos (x, y, z).

Hamilton buscou definir a soma e o produto desses números triplos obedecendo as mesmas regras da soma e da multiplicação dos pares numéricos e esperava que isso levasse a translações e a rotações no espaço, da mesma forma que acontecia com os pares numéricos no plano. Ele observou que i é um segmento perpendicular a 1, então é normal que haja outra unidade imaginária perpendicular às duas anteriores, e definiu j assumindo que esta também satisfaz $j^2 = -1$, pois isso levaria, quando do produto de 1 por j^2, a uma rotação de 180° obtendo -1, porém essa rotação aconteceria no plano xOz, enquanto que o produto de 1 por i^2 numa rotação de 180° no plano xOy e desse modo o tripleto tomou a forma $x + yi + zj$ [2].

Definir a soma de tripletos não foi difícil, já que procedendo de modo análogo aos complexos temos

$$(a + bi + cj) + (x + yi + zj) = (a + x) + (b + y)i + (c + z)j.$$

Porém, se definirmos a multiplicação similar à dos complexos, e assumindo a comutatividade da multiplicação entre as componentes i e j, temos

$$(a + bi + cj) \cdot (x + yi + zj) = (ax - by - cz) + (ay + bx)i + (az + cx)j + (bz + cy)ij,$$

que em princípio não é um tripleto pois aparece o fator ij. Hamilton tentou defini-lo de várias formas para que a multiplicação de tripletos fosse fechada, no entanto, não obteve êxito.

Hamilton continuou com sua pesquisa e percebeu que era necessária a existência de outro termo, k, definido da mesma maneira que j, isto é, $k^2 = -1$ e k deveria ser perpendicular simultaneamente a i e a j. E definiu os números da forma $x + yi + zj + wk$ como quatérnios. Neste caso, a multiplicação e a soma são fechados, porém a multiplicação não é comutativa.

Os números quatérnios possuem muitas aplicações práticas. Em particular são usados em computação gráfica para descrever movimentos tridimensionais. Neste trabalho estamos mais preocupados com a construção deste conjunto e com as propriedades destes números. Desta forma, nosso objetivo principal é apresentar o conjunto dos quatérnios, provar as principais propriedades das operações de adição e multiplicação destes números, e apresentar uma construção para algumas funções elementares a valores quatérnios.

2. O conjunto dos quatérnios

Nesta seção apresentaremos a definição de um número quatérnio e as principais notações envolvendo o conjunto dos quatérnios e os números quatérnios.

Definição 1. O conjunto dos números quatérnios, denotado por $\mathbb{H}$, é formado por todos os números da forma $q = a + bi + cj + dk$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e i, j e k satisfazendo as relações $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$ e $ji = -k$.

Desta definição, temos que

$$ijk = (ij)k = kk = k^2 = -1,$$

e com isto,

$$\begin{aligned}
ik &= i(ij) = i^2 j = -j, \\
ki &= -j^2(ki) = -j(jk)i = -jii = -j(-1) = j, \\
jk &= -i^2(jk) = -iijk = -i(ijk) = -i(-1) = i, \\
kj &= (ij)j = i(j^2) = -i.
\end{aligned}$$

Observe que para definir os produtos ik, ki, jk e kj, é assumida a associatividade da multiplicação das componentes i, j e k.

De maneira prática, segundo [1], podemos realizar a multiplicação das unidades com base no diagrama abaixo. Neste diagrama, a multiplicação de quaisquer duas unidades no sentido anti-horário é a terceira unidade, e a multiplicação de quaisquer duas unidades no sentido horário é o oposto da terceira unidade.

$$\begin{tikzcd}
& i \arrow[dl] & \\
j \arrow[rr] & & k \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Identificando $bi + cj + dk$ com o vetor $\vec{u} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$, podemos representar qualquer $q \in \mathbb{H}$ por uma das seguintes formas,

$$q = a + bi + cj + dk = a + (b, c, d) = a + \vec{u} = (a, \vec{u}).$$

A expressão $q = a + bi + cj + dk$ é dita forma algébrica de um quatérnio e a expressão $q = a + \vec{u}$ é dita forma vetorial de um quatérnio.

Definição 2. Dado um quatérnio $q = a + bi + cj + dk = a + \vec{u}$, definimos a parte real de q como sendo o número real a, e denotamos por $Re(q) = a$. Também definimos a parte imaginária ou parte vetorial de q por $Im(q) = bi + cj + dk = (b, c, d) = \vec{u}$.

Definição 3. Dois números quatérnios $q = a + bi + cj + dk$ e $r = x + yi + zj + wk$ são ditos iguais, e escrevemos $q = r$, se e somente se, $a = x$, $b = y$, $c = z$ e $d = w$. De outra forma, $q = r$, se e somente se, $Re(q) = Re(r)$ e $Im(q) = Im(r)$.

Fica claro da definição anterior que, considerando a forma vetorial de um quatérnio, se $q = a + \vec{u}$ e $r = x + \vec{v}$ então $q = r$ se e somente se $a = x$ e $\vec{u} = \vec{v}$.

3. Álgebra dos quatérnios

Definição 4. Definimos a adição entre quatérnios como sendo a aplicação

$$+ : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \quad \to \quad \mathbb{H}$$

que a cada par de quatérios $q = a + bi + cj + dk = a + \vec{u}$ e $r = x + yi + zj + wk = x + \vec{v}$, associa o quatérnio denotado por $q + r$, denominado resultado da adição de q com r, e dado por

$$\begin{aligned} q + r &= (a + bi + cj + dk) + (x + yi + zj + wk) \\ &= (a + x) + (b + y)i + (c + z)j + (d + w)k, \end{aligned}$$

ou equivalentemente na forma vetorial,

$$q + r = (a + \vec{u}) + (x + \vec{v}) = (a + x) + (\vec{u} + \vec{v}).$$

Fica claro da definição anterior que consideramos a adição de dois vetores $\vec{u} = bi + cj + dk = (b, c, d)$ e $\vec{v} = yi + zj + wk = (y, z, w)$ como sendo a adição convencional da geometria analítica $(\vec{u} + \vec{v}) = (b + y)i + (c + z)j + (d + w)k = (b + y, c + z, d + w)$.

A seguir provaremos algumas propriedades da adição de quatérnios. É conveniente, por uma questão de simplicidade da notação, utilizar a forma vetorial para as demonstrações que se seguirão. Desta forma usaremos então propriedades envolvendo a adição de vetores no espaço $\mathbb{R}^3$. Em particular, lembremos que a adição de vetores é associativa e comutativa, isto é, $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ e $(\vec{u}+\vec{v}) = (\vec{v}+\vec{u})$ respectivamente, para quaisquer que sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$.

Proposição 5. *A adição de quatérnios é associativa, isto é,*

$$(q+r)+s = q+(r+s),$$

para quaisquer que sejam $q, r, s \in \mathbb{H}$.

Demonstração. Dados $q = a+\vec{u}$, $r = b+\vec{v}$ e $s = c+\vec{w}$, quatérnios arbitrários, temos

$$\begin{aligned}
(q+r)+s &= ((a+\vec{u})+(b+\vec{v}))+(c+\vec{w}) \\
&= ((a+b)+(\vec{u}+\vec{v}))+(c+\vec{w}) \\
&= ((a+b)+c)+((\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}) \\
&= (a+(b+c))+(\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})) \\
&= (a+\vec{u})+((b+c)+(\vec{v}+\vec{w})) \\
&= (a+\vec{u})+((b+\vec{v})+(c+\vec{w})) = q+(r+s).
\end{aligned}$$

□

Proposição 6. *A adição de quatérnios é comutativa, isto é,*

$$q+r = r+q,$$

para quaisquer que sejam $q, r \in \mathbb{H}$.

Demonstração. Dados $q = a+\vec{u}$ e $r = b+\vec{v}$, quatérnios arbitrários, temos

$$\begin{aligned}
q+r &= (a+\vec{u})+(b+\vec{v}) \\
&= (a+b)+(\vec{u}+\vec{v}) \\
&= (b+a)+(\vec{v}+\vec{u}) \\
&= (b+\vec{v})+(a+\vec{u}) = r+q.
\end{aligned}$$

□

Proposição 7. *Existe $r \in \mathbb{H}$ de forma que $q + r = r + q = q$, para todos $q \in \mathbb{H}$.*

Demonstração. Dado $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$ arbitrário, queremos encontrar $r = x + \vec{w}$ de forma que $q + r = q$. A igualdade $r + q = q$ ficará automaticamente satisfeita em virtude da comutatividade da adição.

Para que a igualdade $q + r = q$ seja satisfeita devemos ter

$$(a + \vec{u}) + (x + \vec{w}) = (a + \vec{u}),$$

ou ainda

$$(a + x) + (\vec{u} + \vec{w}) = (a + \vec{u}),$$

e da igualdade de quatérnios, devemos ter

$$a + x = a, \qquad \text{e} \qquad \vec{u} + \vec{w} = \vec{u}.$$

Como estas últimas igualdades são igualdades entre números reais, e entre vetores de $\mathbb{R}^3$, existem $x \in \mathbb{R}$, e $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ a saber $x = 0$ e $\vec{w} = \vec{0}$, que cumprem estas duas igualdades simultaneamente para todos $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$.

Segue que existe $r = 0 + 0i + 0j + 0k = 0 + \vec{0} \in \mathbb{H}$ de forma que $q + r = r + q = q$ para todos $q \in \mathbb{H}$. □

O elemento $(0 + \vec{0}) \in \mathbb{H}$ a que se refere a proposição anterior é chamado de elemento neutro da adição no conjunto $\mathbb{H}$. É comum chamar também o elemento neutro de elemento nulo, ou zero do conjunto. Sendo assim, deste ponto em diante, o elemento $(0 + \vec{0}) \in \mathbb{H}$ será chamado de zero e representado por $0_{\mathbb{H}}$ ou simplesmente 0 quando não houver dúvida que $0 \in \mathbb{H}$. Então, $0 = 0_{\mathbb{H}} = 0 + \vec{0} = 0 + 0i + 0j + 0k \in \mathbb{H}$ é o (único) elemento que cumpre $0 + q = q + 0 = q$ para qualquer que seja $q \in \mathbb{H}$.

Definição 8. Definimos $\mathbb{H}^*$ como sendo o conjunto formado por todos os quatérnios não nulos, ou seja, $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0_{\mathbb{H}}\} = \mathbb{H} - \{0\}$.

Proposição 9. *Todo número quatérnio admite simétrico para a adição, isto é, dado qualquer $q \in \mathbb{H}$, existe $r \in \mathbb{H}$, de forma que $q + r = r + q = 0$.*

Demonstração. Dado $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$ arbitrário, queremos obter $r = x + \vec{w} \in \mathbb{H}$ de forma que $q + r = 0$. A igualdade $r + q = 0$ ficará garantida pela comutatividade da adição.

Para que $q + r = 0$ seja satisfeita, queremos então que

$$(a + \vec{u}) + (x + \vec{w}) = 0 = 0 + \vec{0},$$

ou ainda

$$(a + x) + (\vec{u} + \vec{w}) = 0 + \vec{0}.$$

Segue da igualdade de quatérnios que, desejamos encontrar $x \in \mathbb{R}$ e $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ de forma que

$$x + a = 0, \qquad \text{e} \qquad \vec{u} + \vec{w} = \vec{0},$$

para $a \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. Da igualdade de números reais, existe $x \in \mathbb{R}$, a saber, $x = -a$, que cumpre a igualdade desejada. Também da igualdade de vetores de $\mathbb{R}^3$, segue que existe $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$, que é precisamente $\vec{w} = -\vec{u}$, e que cumpre a igualdade desejada.

Assim, dado qualquer $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, existe $r = (-a) + (-\vec{u}) \in \mathbb{H}$ de forma que $q + r = r + q = 0$. □

O elemento $r \in \mathbb{H}$ a que se refere a última proposição é chamado de elemento simétrico de $q \in \mathbb{H}$ para a adição no conjunto $\mathbb{H}$. Deste ponto em diante, o elemento $(-a) + (-\vec{u}) = (-a) + (-b)i + (-c)j + (-d)k \in \mathbb{H}$ será chamado de simétrico de $q = (a + \vec{u}) = (a + bi + cj + dk) \in \mathbb{H}$, denotado simplesmente por $(-q)$ e representado comumente por $-q = -(a + \vec{u}) = -a - \vec{u} = -a - bi - cj - dk$. De qualquer forma, $-q \in \mathbb{H}$ é o (único) elemento que cumpre $(-q) + q = q + (-q) = 0$.

Sob o ponto de vista da álgebra, do que temos até agora, o par ordenado $(\mathbb{H}, +)$ é um grupo abeliano.

Definição 10. Dados $q, r \in \mathbb{H}$ com $q = a + bi + cj + dk = a + \vec{u}$ e $r = x + yi + zj + wk = x + \vec{v}$, definimos a diferença de q com r, como sendo o quatérnio denotado por $(q - r)$, e dado por

$$\begin{aligned} q - r = q + (-r) &= (a + bi + cj + dk) + ((-x) + (-y)i + (-z)j + (-d)k) \\ &= (a - x) + (b - y)i + (c - z)j + (d - w)k, \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$q - r = (a + \vec{u}) + ((-x) + (-\vec{v})) = (a - x) + (\vec{u} - \vec{v}).$$

Definição 11. Definimos a multiplicação de um quatérnio por um escalar real como sendo a aplicação

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} \quad \rightarrow \quad \mathbb{H},$$

que a cada escalar (real) α e cada quatérnio $q = a + bi + cj + dk = a + \vec{u}$, associa o quatérnio representado por (αq), dado por

$$\alpha q = \alpha(a + bi + cj + dk) = (\alpha a) + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k,$$

ou equivalentemente na forma vetorial,

$$\alpha q = \alpha(a + \vec{u}) = \alpha a + \alpha \vec{u}.$$

Fica claro da definição anterior que estamos admitindo que a multiplicação de um vetor $\vec{u} = bi + cj + dk = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ é a multiplicação usual da geometria analítica $\alpha\vec{u} = (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k = (\alpha b, \alpha c, \alpha d)$.

Definição 12. A multiplicação entre quatérnios é a aplicação

$$\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \quad \rightarrow \quad \mathbb{H},$$

que a cada par de números quatérnios $q = a + bi + cj + dk = a + \vec{u}$ e $r = x + yi + zj + wk = x + \vec{v}$, associa o quatérnio denotado por $q \cdot r$ ou por qr, denominado resultado da multiplicação, ou produto de q com r, e dado por

$$\begin{aligned} qr &= (a + bi + cj + dk) \cdot (x + yi + zj + wk) \\ &= (ax - by - cz - dw) + (ay + bx + cw - dz)i \\ &\qquad + (az - bw + cx + dy)j + (aw + bz - cy + dx)k, \end{aligned}$$

ou equivalentemente na forma vetorial,

$$qr = (a + \vec{u}) \cdot (x + \vec{v}) = (ax - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle) + (a\vec{v} + x\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}),$$

sendo que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ representa o produto escalar (ou produto interno), e $(\vec{u} \times \vec{v})$ representa o produto vetorial, entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $\mathbb{R}^3$.

Embora a multiplicação entre dois quatérnios possa parecer complicada, basta observar que esta multiplicação segue da ideia da distributividade da multiplicação em relação à adição e considerando que $ii = jj = kk = -1$, $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$,

$kj = -i$, $ki = j$ e $ik = -j$. A expressão vetorial para a multiplicação é conseguida diretamente da expressão algébrica levando em conta as igualdades $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (by + cz + dw)$ e $(\vec{u} \times \vec{v}) = (cw - dz, dy - bw, bz - cy)$ para $\vec{u} = (b, c, d)$ e $\vec{v} = (y, z, w)$ em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 13. *A multiplicação de quatérnios não é comutativa, isto é, existem q e r tais que, $qr \neq rq$.*

Demonstração. Basta ver que $ij = k$ e $ji = -k$. □

No que se segue provaremos algumas propriedades da multiplicação de quatérnios. Propriedades estas que tornarão este conjunto um "quase" corpo. É conveniente, também para a multiplicação, utilizar a forma vetorial para as demonstrações, em virtude da expressão mais curta. Em contrapartida, precisaremos utilizar propriedades envolvendo os produtos vetorial e escalar entre vetores de $\mathbb{R}^3$. A próxima proposição reúne alguns destes resultados. Não demonstraremos estes resultados aqui mas o leitor interessado na demonstração pode consultar algum texto de geometria analítica ou de álgebra linear. Recomendamos [3].

Proposição 14. *Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ são vetores arbitrários e $\alpha \in \mathbb{R}$, então*

i) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$;

ii) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}) = (-\vec{v}) \times \vec{u} = \vec{v} \times (-\vec{u})$;

iii) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$;

iv) $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$;

v) $\vec{u} \times (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \times \vec{v}$;

vi) $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$;

vii) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}$.

Aparentemente a associatividade da multiplicação de quatérnios seria consequência, entre outras propriedades, da associatividade do produto vetorial. Fato este que não ocorre. Entretanto é possível conseguir algum tipo de associatividade do produto vetorial, com termos compensadores. Este resultado é enunciado no próximo lema e será necessário para a prova da associatividade da multiplicação de quatérnios.

Lema 15. *Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ são vetores arbitrários, então*

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}.$$

Demonstração. Dados quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} &= -(\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})) - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} \\ &= -\left(\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \vec{u} - \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{v} \right) - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} \\ &= \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} - \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \vec{u} \\ &= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}.\end{aligned}$$

□

Proposição 16. *A multiplicação de quatérnios é associativa, isto é, para quaisquer $q, r, s \in \mathbb{H}$, tem-se $q(rs) = (qr)s$.*

Demonstração. Suponha que $q = (a + \vec{u})$, $r = (b + \vec{v})$ e $s = (c + \vec{w})$ são quatérnios arbitrários. Então

$$\begin{aligned}(qr)s &= \left[(a + \vec{u})(b + \vec{v}) \right] (c + \vec{w}) \\ &= \left[(ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle) + (a\vec{v} + b\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{v})) \right] (c + \vec{w}) \\ &= (ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle c - \langle a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ &\quad\quad + (ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} + c(a\vec{v} + b\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{v})) + ((a\vec{v} + b\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{v})) \times \vec{w}) \\ &= abc - c\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - a\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle - \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle \\ &\quad\quad + ab\vec{w} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w} + ca\vec{v} + cb\vec{u} + c(\vec{u} \times \vec{v}) + a(\vec{v} \times \vec{w}) + b(\vec{u} \times \vec{w}) + ((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}) \\ &= abc - a\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle - b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle - c\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle \\ &\quad\quad + ab\vec{w} + ac\vec{v} + a(\vec{v} \times \vec{w}) + bc\vec{u} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u} + b(\vec{u} \times \vec{w}) + c(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})) \\ &= a(bc - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle) - \langle \vec{u}, b\vec{w} + c\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{w}) \rangle \\ &\quad\quad + a(b\vec{w} + c\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{w})) + (bc - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle)\vec{u} + (\vec{u} \times (b\vec{w} + c\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{w}))) \\ &= (a + \vec{u}) \left[(bc - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle) + (b\vec{w} + c\vec{v} + (\vec{v} \times \vec{w})) \right] \\ &= (a + \vec{u}) \left[(b + \vec{v})(c + \vec{w}) \right] = q(rs).\end{aligned}$$

□

Proposição 17. *A multiplicação de quatérnios é distributiva em relação à adição. De outra forma, se $q, r, s \in \mathbb{H}$ então*

$$s(q + r) = sq + sr,$$

e também

$$(q+r)s = qs + rs.$$

Demonstração. Sejam $q = a + \vec{u}$, $r = b + \vec{v}$ e $s = c + \vec{w}$ arbitrários. Então

$$\begin{aligned}
s(q+r) &= (c+\vec{w})\left[(a+\vec{u}) + (b+\vec{v})\right] \\
&= (c+\vec{w})\left[(a+b) + (\vec{u}+\vec{v})\right] \\
&= (c(a+b) - \langle \vec{w}, \vec{u}+\vec{v}\rangle) + c(\vec{u}+\vec{v}) + (a+b)\vec{w} + \vec{w}\times(\vec{u}+\vec{v}) \\
&= ca + cb - \langle \vec{w}, \vec{u}\rangle - \langle \vec{w}, \vec{v}\rangle + c\vec{u} + c\vec{v} + a\vec{w} + b\vec{w} + \vec{w}\times\vec{u} + \vec{w}\times\vec{v} \\
&= (ca - \langle \vec{w}, \vec{u}\rangle) + (c\vec{u} + a\vec{w} + \vec{w}\times\vec{u}) + (cb - \langle \vec{w}, \vec{v}\rangle) + (c\vec{v} + b\vec{w} + \vec{w}\times\vec{v}) \\
&= \left[(c+\vec{w})(a+\vec{u})\right] + \left[(c+\vec{w})(b+\vec{v})\right] \\
&= sq + sr,
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
(q+r)s &= \left[(a+\vec{u}) + (b+\vec{v})\right](c+\vec{w}) \\
&= \left[(a+b) + (\vec{u}+\vec{v})\right](c+\vec{w}) \\
&= ((a+b)c - \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w}\rangle) + (a+b)\vec{w} + c(\vec{u}+\vec{v}) + (\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} \\
&= (ac + bc - \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle - \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle) + a\vec{w} + b\vec{w} + c\vec{u} + c\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w} \\
&= (ac - \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle) + (a\vec{w} + c\vec{u} + \vec{u}\times\vec{w}) + (bc - \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle) + (b\vec{w} + c\vec{v} + \vec{v}\times\vec{w}) \\
&= \left[(a+\vec{u})(c+\vec{w})\right] + \left[(b+\vec{v})(c+\vec{w})\right] \\
&= qs + rs.
\end{aligned}$$

□

Do ponto de vista da álgebra, a terna ordenada $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ é um anel, isto é, a adição é associativa, comutativa, admite elemento neutro, e todo elemento admite simétrico, e a multiplicação é associativa e distributiva em relação à adição. É também claro que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ não poderá ser corpo já que a multiplicação não é comutativa. Entretanto, provaremos ainda que $\mathbb{H}$ possui unidade, e que todo elemento não nulo é invertível.

Para os próximos resultados, vamos utilizar também propriedades de módulo (ou norma), de um vetor de $\mathbb{R}^3$. Lembremos que se $\vec{u} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$, então $|\vec{u}| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$. A próxima proposição reúne alguns resultados envolvendo o módulo de um vetor em $\mathbb{R}^3$. A demonstração destas igualdades pode ser encontrada em [3].

Proposição 18. *Se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ são vetores arbitrários e $\alpha \in \mathbb{R}$, então*

i) $|\vec{u}| \geq 0$, *e além disso,* $|\vec{u}| = 0$ *se e somente se* $\vec{u} = 0$;

ii) $|\alpha\vec{u}| = |\alpha||\vec{u}|$;

iii) $|\vec{u}|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle$;

iv) *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)* $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$;

v) *(Desigualdade triangular)* $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$;

vi) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|^2$;

vii) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$, *se e somente se,* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são ortogonais;*

viii) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2$.

A definição de vetores ortogonais, a que nos referimos nesta última proposição, é determinada pela condição $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, isto é, dois vetores são ortogonais se e somente se o produto escalar entre eles é igual a zero. Mas notemos que $\langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = 0$ para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e portanto entenderemos que ao dizer que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais pode ocorrer que pelo menos um deles seja o vetor nulo.

Proposição 19. *A operação de multiplicação no conjunto dos quatérnios admite elemento neutro. De outra forma, existe $r \in \mathbb{H}$ tal que $qr = rq = q$ para todos $q \in \mathbb{H}$.*

Demonstração. Queremos encontrar $r = x + \vec{w} \in \mathbb{H}$ de tal forma que

$$qr = rq = q,$$

para todos $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$.

Da igualdade $qr = q$, temos que

$$(a + \vec{u})(x + \vec{w}) = (ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle) + (a\vec{w} + x\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{w})) = a + \vec{u},$$

e da igualdade de quatérnios queremos obter x e $\vec{w}$ de forma que

$$\begin{cases} ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = a \\ a\vec{w} + x\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{u}. \end{cases} \tag{1}$$

Da segunda equação em (1), temos que

$$a\vec{w} + (x-1)\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{0},$$

e desta forma existem escalares, não todos nulos, tais que a combinação linear dos vetores $\vec{w}$, $\vec{u}$ e $(\vec{u} \times \vec{w})$, resulta no vetor nulo. Segue que os três vetores envolvidos são linearmente dependentes. Como o vetor $(\vec{u} \times \vec{w})$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{w}$ então para que os três vetores sejam linearmente dependentes deve ocorrer que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sejam linearmente dependentes. O vetor procurado $\vec{w}$, deve então satisfazer $\vec{w} = \alpha\vec{u}$, para algum escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Substituindo isto na segunda equação de (1), e levando em conta que $(\vec{u} \times (\alpha\vec{u})) = \vec{0}$, obtemos

$$(\alpha a + x - 1)\vec{u} = \vec{0}.$$

Mas sendo $\vec{u}$ um vetor arbitrário em $\mathbb{R}^3$, não podemos esperar que $\vec{u} = \vec{0}$ sempre, e assim segue que o escalar deve ser nulo, isto é, $(\alpha a + x - 1) = 0$, ou ainda $(x-1) = -\alpha a$. Voltando agora na primeira equação em (1), temos que

$$a = ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = ax - \langle \vec{u}, \alpha\vec{u} \rangle = ax - \alpha|\vec{u}|^2,$$

ou ainda

$$\alpha|\vec{u}|^2 = ax - a = a(x-1),$$

e substituindo $(x-1) = -\alpha a$, temos

$$\alpha|\vec{u}|^2 = a(x-1) = -\alpha a^2.$$

Ora, como $|\vec{u}|^2$ e a^2 são ambos não negativos, os dois membros desta última igualdade possuem sinais contrários e assim, a igualdade somente será satisfeita se $\alpha = 0$ e portanto $\vec{w} = \alpha\vec{u} = \vec{0}$. Com $\vec{w} = \vec{0}$ de volta em qualquer uma das duas equações em (1) segue que $x = 1$.

Desta forma, $r = x + \vec{w} = 1 + \vec{0} = 1 + 0i + 0j + 0k$ é o (único) elemento que cumpre $qr = q$ para todo $q \in \mathbb{H}$. É fácil ver que também $rq = q$ para todo $q \in \mathbb{H}$. Segue que a operação de multiplicação admite elemento neutro, a saber $r = 1 + \vec{0} = 1 + 0i + 0j + 0k$. $\square$

O elemento neutro da operação de multiplicação a que se refere a proposição anterior, $1+\vec{0} = 1+0i+0j+0k$ será deste ponto em diante chamado de unidade de $\mathbb{H}$, e representado por $1_{\mathbb{H}}$ ou simplesmente por 1, quando ficar claro que $1 \in \mathbb{H}$.

Definição 20. Um quatérnio q é dito invertível se admitir simétrico pela operação de multiplicação. Isto é, se existir $r \in \mathbb{H}$ tal que

$$qr = rq = 1,$$

e neste caso, o quatérnio r será chamado de inverso de q e representado por q^{-1}.

Proposição 21. *Todo elemento não nulo de $\mathbb{H}$ é invertível. Isto é, dado $q = (a+\vec{u}) \in \mathbb{H}^*$, existe $r \in \mathbb{H}$, de forma que*

$$qr = rq = 1.$$

Demonstração. Primeiro observemos que $q = a+\vec{u} = 0$, se e somente se $a = 0$ e $\vec{u} = \vec{0}$, se e somente se $a = 0$ e $|\vec{u}| = 0$, se e somente se $(a^2+|\vec{u}|^2) = 0$.

Seja então $q = a+\vec{u} \in \mathbb{H}^*$, e portanto $(a^2+|\vec{u}|^2) \neq 0$. Queremos obter $r = x+\vec{w} \in \mathbb{H}$, de forma que $qr = rq = 1$. Da igualdade $qr = 1$, temos que

$$(a+\vec{u})(x+\vec{w}) = (ax-\langle\vec{u},\vec{w}\rangle) + (a\vec{w}+x\vec{u}+\vec{u}\times\vec{w}) = 1 = 1+\vec{0},$$

donde segue da igualdade de quatérnios que

$$\begin{cases} ax-\langle\vec{u},\vec{w}\rangle = 1 \\ a\vec{w}+x\vec{u}+\vec{u}\times\vec{w} = \vec{0}. \end{cases} \tag{2}$$

Da primeira equação em (2), temos $ax = 1+\langle\vec{u},\vec{w}\rangle$, e multiplicando ambos os membros por a, segue

$$\begin{aligned} a^2x &= a + a\langle\vec{u},\vec{w}\rangle \\ &= a + \langle\vec{u},a\vec{w}\rangle \\ &= a + \langle\vec{u},-x\vec{u}-\vec{u}\times\vec{w}\rangle \\ &= a - x\langle\vec{u},\vec{u}\rangle - \langle\vec{u},\vec{u}\times\vec{w}\rangle. \end{aligned}$$

Mas notemos que na igualdade acima, $\langle\vec{u},\vec{u}\times\vec{w}\rangle = \vec{0}$, pois, $\vec{u}\times\vec{w}$ é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e desta forma o produto escalar entre eles é igual a zero. Segue que

$$a^2x = a - x\langle\vec{u},\vec{u}\rangle - \langle\vec{u},\vec{u}\times\vec{w}\rangle = a - x|\vec{u}|^2,$$

donde

$$x(a^2 + |\vec{u}|^2) = a,$$

e como $(a^2 + |\vec{u}|^2) \neq 0$, segue que

$$x = \frac{a}{a^2 + |\vec{u}|^2}.$$

Notemos agora que da segunda igualdade em (2) segue que os três vetores envolvidos na soma são linearmente dependentes. Isto porque existem três escalares não nulos tais que a soma entre estes três vetores resulta no vetor nulo. Mas o vetor $\vec{u} \times \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{w}$ simultaneamente, então para que os três vetores sejam linearmente dependentes deve ocorrer que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ sejam linearmente dependentes. Segue que $\vec{w} = \alpha\vec{u}$ para algum escalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Voltando com $\vec{w} = \alpha\vec{u}$ na primeira equação em (2), obtemos

$$ax - 1 = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \alpha\vec{u} \rangle = \alpha|\vec{u}|^2,$$

e com $x = \frac{a}{a^2+|\vec{u}|^2}$, segue que

$$\alpha|\vec{u}|^2 = ax - 1 = \frac{a^2}{a^2 + |\vec{u}|^2} - 1 = \frac{-|\vec{u}|^2}{a^2 + |\vec{u}|^2}.$$

Esta última igualdade é sempre satisfeita colocando $\alpha = \frac{-1}{a^2+|\vec{u}|^2}$ (mesmo quando $\vec{u} = \vec{0}$). Desta forma $\vec{w} = \alpha\vec{u} = \left(\frac{-1}{a^2+|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$, e portanto

$$r = x + \vec{w} = \left(\frac{a}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right) + \left(\frac{-1}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right)\vec{u} = \left(\frac{1}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right)(a - \vec{u})$$

é o (único) quatérnio que cumpre $qr = 1$. Podemos verificar que também $rq = 1$ e desta forma, dado qualquer $q \in \mathbb{H}^*$, existe $r \in \mathbb{H}$ que cumpre $qr = rq = 1$, chamado de inverso multiplicativo de q. □

De acordo com esta última proposição, se $q = (a + \vec{u}) \neq 0$ então q é invertível, e além disso,

$$q^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right) + \left(\frac{-1}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right)\vec{u} = \left(\frac{1}{a^2 + |\vec{u}|^2}\right)(a - \vec{u})$$

é o único quatérnio que cumpre $q(q^{-1}) = (q^{-1})q = 1$. Observe ainda que, sendo q não nulo, q^{-1} é também não nulo, e portanto também invertível. A própria igualdade $q(q^{-1}) = (q^{-1})q = 1$ nos diz que q é o inverso de q^{-1}, isto é, $q = (q^{-1})^{-1}$.

Observemos que em virtude da igualdade $0 \cdot q = q \cdot 0 = 0$, para qualquer $q \in \mathbb{H}$, então 0 não pode jamais ser um elemento invertível. A proposição anterior pode portanto ser entendida também no sentido recíproco, isto é, q é invertível se e somente se $q \neq 0$.

Com o que provamos até agora, a terna ordenada $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ é um anel, **não** comutativo, com unidade, no qual todo elemento não nulo admite inverso multiplicativo.

Definição 22. Dados dois quatérnios q e r, com $r \neq 0$, definimos o quociente de q por r como sendo o quatérnio representado por $\frac{q}{r}$, chamado de resultado da divisão de q por r e dado por

$$\frac{q}{r} = q(r^{-1}) = qr^{-1}.$$

Em virtude desta última definição, no caso em que $q \in \mathbb{H}^*$, é comum escrever que $q^{-1} = \frac{1}{q}$. Além disso, outras propriedades advindas da teoria dos anéis podem ser aplicadas a esta notação. É importante tomar algum cuidado pois não podemos fazer uso da propriedade comutativa da multiplicação. Como consequência disto, podemos ver que $q\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{qr}{s}$, mas $\left(\frac{q}{s}\right) r \neq \frac{qr}{s}$.

Por este motivo vamos evitar a notação $\frac{q}{r}$, de divisão entre quatérnios. Usaremos esta notação apenas quando estivermos tratando com números reais. A notação $\frac{q}{\alpha}$ com $\alpha \in \mathbb{R}^*$ e $q = (a + \vec{u}) \in \mathbb{H}$ significará $(\frac{1}{\alpha})q = (\frac{1}{\alpha})(a + \vec{u}) = \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\vec{u}$.

Provaremos agora que o conjunto dos quatérnios não possui divisores próprios de zero. Esta propriedade faria do conjunto dos quatérnios um anel de integridade se este conjunto fosse um anel comutativo.

Proposição 23. *Se q e r são dois quatérnios tais que $qr = 0$, então $q = 0$ ou $r = 0$.*

Demonstração. Sejam $q = (a + \vec{u})$ e $r = (b + \vec{v})$ e suponha ainda que

$$(a + \vec{u})(b + \vec{v}) = 0. \tag{3}$$

Para provar que $q = 0$ ou $r = 0$, vamos supor que um deles não seja zero e, neste caso, provar que obrigatoriamente o outro será. Suponha então que também $q = (a + \vec{u}) \neq 0$, e equivalentemente que $(a^2 + |\vec{u}|^2) \neq 0$.

Da igualdade (3) temos que

$$(ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle) + (a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}) = 0 + \vec{0},$$

e portanto

$$\begin{cases} ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \\ a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}. \end{cases} \tag{4}$$

Multiplicando a primeira equação em (4) por $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$a^2 b - \langle \vec{u}, a\vec{v} \rangle = 0,$$

e substituindo $(a\vec{v})$ da segunda equação obtemos

$$0 = a^2 b - \langle \vec{u}, a\vec{v} \rangle = a^2 b - \langle \vec{u}, -b\vec{u} - \vec{u} \times \vec{v} \rangle = a^2 b + b|\vec{u}|^2 + \langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle.$$

Mas $\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ pois $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e desta forma o produto escalar é igual a zero. Segue que esta última igualdade fica reescrita como

$$0 = a^2 b + b|\vec{u}|^2 = b(a^2 + |\vec{u}|^2),$$

e como $(a^2 + |\vec{u}|^2) \neq 0$ então segue que $b = 0$. Voltando ao sistema (4) com $b = 0$ temos

$$\begin{cases} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \\ a\vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}. \end{cases} \tag{5}$$

Tomando o módulo ao quadrado da segunda equação de (5), temos que

$$|a\vec{v} + (\vec{u} \times \vec{v})|^2 = |\vec{0}|^2 = 0,$$

e como o vetor $(\vec{u} \times \vec{v})$ é ortogonal ao vetor $a\vec{v}$ segue dos itens (iv) e (v) da proposição 18 que

$$0 = |a\vec{v} + (\vec{u} \times \vec{v})|^2 = |a\vec{v}|^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |a|^2|\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2,$$

e levando em conta a primeira igualdade de (5) temos que

$$0 = |a|^2|\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 = (|a|^2 + |\vec{u}|^2)|\vec{v}|^2,$$

e como $(|a|^2 + |\vec{u}|^2) \neq 0$, segue que $|\vec{v}|^2 = 0$, donde $\vec{v} = 0$, e portanto $r = (b + \vec{v}) = 0$. Isto termina esta demonstração. $\square$

O próximo corolário é a contrapositiva equivalente da proposição anterior.

Corolário 24. *Se q e r são dois quatérnios ambos não nulos, então qr é também não nulo.*

Corolário 25. *Se q e r são dois quatérnios invertíveis, então qr é invertível e além disso,*

$$(qr)^{-1} = r^{-1}q^{-1}.$$

Demonstração. Supondo que q e r são dois quatérnios invertíveis, então são dois quatérnios não nulos. Do corolário anterior, qr também é não nulo e portanto invertível. Além disso, como

$$(qr)(r^{-1}q^{-1}) = q(rr^{-1})q^{-1} = qq^{-1} = 1,$$

e também

$$(r^{-1}q^{-1})(qr) = r^{-1}(q^{-1}q)r = r^{-1}r = 1,$$

então segue da definição de inverso que o inverso de (qr) é precisamente $r^{-1}q^{-1}$, isto é, $(qr)^{-1} = r^{-1}q^{-1}$. □

4. Conjugado e módulo de um quatérnio

Nesta seção estudaremos os conceitos de módulo e de conjugado de um quatérnio. A noção de módulo é fundamental para outros estudos com estes números. As definições de convergência de sequências e de séries de quatérnios bem como de limite de funções a valores quatérnios, se fundamentam principalmente na ideia de distância entre dois quatérnios. Esta distância é tradicionalmente representada pela expressão $|q - r|$. Nestes termos é fundamental o conceito de módulo de um quatérnio e o estudo de propriedades a respeito deste módulo.

A noção de conjugado por sua vez está ligada com a de módulo, principalmente em virtude da expressão $(q \cdot \overline{q}) = |q|^2$, que é verdadeira se q for um número complexo e se $\overline{q}$ representa o conjugado de q. Estabeleceremos esta ideia também no conjunto dos quatérnios.

Definição 26. Seja $q = a + \vec{u} = a + bi + cj + dk$ um quatérnio arbitrário. O módulo de q é o número real, representado por $|q|$, e dado por

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{a^2 + |\vec{u}|^2}.$$

Fica claro que na definição acima $|\vec{u}| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ representa a norma Euclidiana ou o módulo de $\vec{u} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. Para facilitar a notação, é comum utilizar a expressão $|q|^2 = a^2 + |\vec{u}|^2$, que evita o uso da raiz quadrada. Uma vez definido o módulo de um quaténio, vamos verificar a validade de algumas propriedades envolvendo esta definição. Algumas destas propriedades são similares às propriedades de módulo de números reais ou de números complexos.

Proposição 27. *Para quaisquer $q \in \mathbb{H}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos*

i) $|q| \geq 0$ *e além disso,* $q = 0$ *se e somente se* $|q| = 0$.

ii) $|q| = |-q|$;

iii) $|\alpha q| = |\alpha||q|$;

iv) $Re(q) \leq |Re(q)| \leq |q|$;

v) $|Im(q)| \leq |q|$;

Demonstração. Em toda esta demonstração, suponha que $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$. Para o primeiro item, temos $|q| = \sqrt{a^2 + |\vec{u}|^2} \geq 0$. Além disso, $q = (a + \vec{u}) = 0 = 0 + \vec{0}$, se e somente se $a = 0$ e $\vec{u} = \vec{0}$, se e somente se $a = 0$ e $|\vec{u}| = 0$, se e somente se $(a^2 + |\vec{u}|^2) = 0$, se e somente se $|q|^2 = 0$, se e somente se $|q| = 0$.

Para o segundo item,

$$|q|^2 = a^2 + |\vec{u}|^2 = (-a)^2 + |-\vec{u}|^2 = |-q|^2,$$

e extraindo a raiz quadrada em ambos os membros vem $|q| = |-q|$.

Para provar (iii),

$$\begin{aligned} |\alpha q|^2 &= |\alpha(a + \vec{u})|^2 = |\alpha a + \alpha\vec{u}|^2 \\ &= (\alpha a)^2 + |\alpha\vec{u}|^2 \\ &= \alpha^2 a^2 + \alpha^2|\vec{u}|^2 = \alpha^2(a^2 + |\vec{u}|^2) = \alpha^2|q|^2, \end{aligned}$$

e extraindo raiz quadrada em ambos os membros, segue que $|\alpha q| = |\alpha||q|$.

Para provar o item (iv), se $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, então $a \in \mathbb{R}$ e usando propriedades do módulo de números reais temos que

$$a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + |\vec{u}|^2} = |q|,$$

e como $a = Re(q)$, temos $Re(q) \leq |Re(q)| \leq |q|$.

Finalmente, para (v), como $Im(q) = \vec{u}$, temos que,

$$|Im(q)|^2 = |\vec{u}|^2 \leq a^2 + |\vec{u}|^2 = |q|^2,$$

e tomando a raiz quadrada em ambos os membros, $|Im(q)| \leq |q|$. $\square$

Dentre as propriedades principais do módulo de um número real ou complexo está o fato de que o módulo do produto é o produto dos módulos. Provaremos agora esta propriedade.

Proposição 28. *Para quaisquer $q, r \in \mathbb{H}$ temos que $|qr| = |q||r|$.*

Demonstração. Para esta proposição usaremos as propriedades (vi), (vii) e $(viii)$ da proposição 18. Se $q = a + \vec{u}$ e $r = x + \vec{w}$ são quatérnios arbitrários, então

$$\begin{aligned} |qr|^2 &= |(a+\vec{u})(x+\vec{w})|^2 \\ &= |(ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle) + (a\vec{w} + x\vec{u} + \vec{u} \times \vec{w})|^2 \\ &= (ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle)^2 + |a\vec{w} + x\vec{u} + \vec{u} \times \vec{w}|^2. \end{aligned}$$

Agora como $\vec{u} \times \vec{w}$ é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{w}$ simultaneamente, então $\vec{u} \times \vec{w}$ é um vetor ortogonal à qualquer combinação linear entre $\vec{u}$ e $\vec{w}$, em particular à $(a\vec{w} + x\vec{u})$. Desta forma,

$$\begin{aligned} |qr|^2 &= (ax - \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle)^2 + |a\vec{w} + x\vec{u} + \vec{u} \times \vec{w}|^2 \\ &= a^2x^2 - 2ax\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle^2 + |a\vec{w} + x\vec{u}|^2 + |\vec{u} \times \vec{w}|^2 \\ &= a^2x^2 - 2ax\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + |a\vec{w} + x\vec{u}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{w}|^2 \\ &= a^2x^2 + a^2|\vec{w}|^2 + x^2|\vec{u}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{w}|^2 \\ &= (a^2 + |\vec{u}|^2)(x^2 + |\vec{w}|^2) = |q|^2|r|^2 \end{aligned}$$

e a igualdade desejada segue extraindo a raiz quadrada em ambos os membros. $\square$

Corolário 29. *Se $q \in \mathbb{H}^*$ então $|q^{-1}| = \frac{1}{|q|} = |q|^{-1}$.*

Demonstração. Se $q \neq 0$ então q é invertível, e portanto existe q^{-1} de forma que

$$q(q^{-1}) = (q^{-1})q = 1.$$

Tomando o módulo em ambos os membros e levando em conta a proposição anterior, temos que

$$|q||q^{-1}| = |q(q^{-1})| = |1| = 1.$$

Como q é não nulo, então $|q| \neq 0$, e portanto dividindo esta última igualdade por $|q|$ segue que

$$|q^{-1}| = \frac{1}{|q|}.$$

□

Proposição 30. *Se* $q, r \in \mathbb{H}$ *então*

$$|q + r| \leq |q| + |r|.$$

Demonstração. Se $q = a + \vec{u}$ e $r = x + \vec{w}$ então

$$\begin{aligned} |q + r|^2 &= |(a + \vec{u}) + (x + \vec{w})|^2 \\ &= |(a + x) + (\vec{u} + \vec{w})|^2 \\ &= (a + x)^2 + |\vec{u} + \vec{w}|^2 \\ &\leq (a + x)^2 + (|\vec{u}| + |\vec{w}|)^2 \\ &= a^2 + 2ax + x^2 + |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{w}| + |\vec{w}|^2 \\ &= a^2 + |\vec{u}|^2 + 2(ax + |\vec{u}||\vec{w}|) + x^2 + |\vec{w}|^2 \\ &\leq |q|^2 + 2(|ax| + |\vec{u}||\vec{w}|) + |r|^2. \end{aligned}$$

Também notemos que

$$(|ax| + |\vec{u}||\vec{w}|)^2 = a^2x^2 + 2|ax||\vec{u}||\vec{w}| + |\vec{u}|^2|\vec{w}|^2,$$

e usando o fato de que $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ quaisquer que sejam α e β reais, então

$$\begin{aligned} (|ax| + |\vec{u}||\vec{w}|)^2 &= a^2x^2 + 2|ax||\vec{u}||\vec{w}| + |\vec{u}|^2|\vec{w}|^2 \\ &\leq a^2x^2 + x^2|\vec{u}|^2 + a^2|\vec{w}|^2 + |\vec{u}|^2|\vec{w}|^2 \\ &= (a^2 + |\vec{u}|^2)(x^2 + |\vec{w}|^2) = |q|^2|r|^2, \end{aligned}$$

donde

$$|ax| + |\vec{u}||\vec{w}| \leq |q||r|.$$

Segue que

$$\begin{aligned}|q+r|^2 &\leq |q|^2 + 2(|ax| + |\vec{u}||\vec{w}|) + |r|^2 \\ &\leq |q|^2 + 2|q||r| + |r|^2 = (|q| + |r|)^2\end{aligned}$$

e a desigualdade desejada é obtida extraindo raiz quadrada em ambos os membros.
□

Corolário 31. *Se* $q, r \in \mathbb{H}$ *então* $||q| - |r|| \leq |q - r|$.

Demonstração. Dados quaisquer $q, r \in \mathbb{H}$, usando a proposição anterior, temos que

$$|q| = |q - r + r| \leq |q - r| + |r|,$$

e assim,

$$|q| - |r| \leq |q - r|.$$

Também,

$$|r| = |r - q + q| \leq |r - q| + |q|,$$

e assim,

$$-|q - r| = -|r - q| \leq |q| - |r|.$$

Segue portanto que,

$$-|q - r| \leq |q| - |r| \leq |q - r|,$$

e das propridades do módulo de números reais,

$$||q| - |r|| \leq |q - r|.$$

□

Como mencionado anteriormente a ideia de conjugado é baseada na ideia de que, dado $q \in \mathbb{H}$, encontremos um quatérnio denotado por $\overline{q}$ e que satisfaz $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2$. Nestes termos se $q = a + \vec{u}$ queremos definir $\overline{q} = x + \vec{w}$ de forma que seja válida a igualdade

$$(a + \vec{u})(x + \vec{w}) = |q|^2,$$

ou ainda

$$\begin{cases} (ax - \vec{u} \cdot \vec{w}) = |q|^2 \\ a\vec{w} + x\vec{u} + \vec{u} \times \vec{w} = \vec{0}. \end{cases} \tag{6}$$

Naturalmente a segunda igualdade nos diz que os vetores $\vec{u}$, $\vec{w}$ e $\vec{u} \times \vec{w}$ deverão ser linearmente dependentes e como $\vec{u} \times \vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{w}$, então $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é que devem ser linearmente dependentes. Portanto $\vec{w} = \alpha\vec{u}$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Substituindo isto na segunda igualdade em (6), e levando em conta que $\alpha(\vec{u} \times \vec{u}) = \vec{0}$, obtemos

$$(a\alpha + x)\vec{u} = \vec{0}.$$

Mas como $\vec{u}$ é arbitrário, não podemos esperar nesta última igualdade, que $\vec{u} = \vec{0}$ sempre. Devemos então pedir que $(a\alpha + x) = 0$, ou que $x = -a\alpha$. Substituindo este x e $\vec{w} = \alpha\vec{u}$, na primeira igualdade em (6), vem

$$|q|^2 = -a^2\alpha - \alpha|\vec{u}|^2 = -\alpha(a^2 + |\vec{u}|^2) = -\alpha|q|^2,$$

e esta igualdade fica cumprida colocando $\alpha = -1$, inclusive quando $q = 0$. Segue que $x = -\alpha a = a$ e $\vec{w} = \alpha\vec{u} = -\vec{u}$, e a igualdade $(q\overline{q}) = |q|^2$ fica então satisfeita se colocarmos $\overline{q} = x + \vec{w} = a - \vec{u}$. Esta ideia motiva a próxima definição.

Definição 32. Seja $q \in \mathbb{H}$ dado por $q = a + \vec{u} = a + bi + cj + dk$. Então o conjugado de q é o quatérnio, denotado por $\overline{q}$, e definido por

$$\overline{q} = a - \vec{u} = a - bi - cj - dk.$$

Vamos verificar a validade de algumas propriedades envolvendo a definição de conjugado de um quatérnio. Tais propriedades são semelhantes às propriedades envolvendo o conjugado de números complexos.

Proposição 33. *Sejam $q, r \in \mathbb{H}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

i) $\overline{\overline{q}} = q$;

ii) $\overline{q + r} = \overline{q} + \overline{r}$;

iii) $\overline{qr} = \overline{r}\,\overline{q}$;

iv) $\overline{\alpha q} = \alpha\overline{q}$;

v) $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2$;

vi) $|q| = |\overline{q}|$;

vii) $q + \overline{q} = 2Re(q) \quad e \quad q - \overline{q} = 2Im(q)$;

Demonstração. Para provar o item (i), se $q = a + \vec{u}$ então $\overline{\overline{q}} = \overline{(\overline{q})} = \overline{(a - \vec{u})} = (a + \vec{u}) = q$.

Para os itens (ii) e (iii), sejam $q = a + \vec{u}$ e $r = b + \vec{v}$. Então

$$\begin{aligned}
\overline{q + r} &= \overline{(a + \vec{u}) + (b + \vec{v})} \\
&= \overline{(a + b) + (\vec{u} + \vec{v})} \\
&= (a + b) - (\vec{u} + \vec{v}) = (a - \vec{u}) + (b - \vec{v}) = \overline{q} + \overline{r},
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\overline{qr} &= \overline{(a + \vec{u})(b + \vec{v})} \\
&= \overline{(ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle) + (a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v})} \\
&= (ab - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle) - (a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \times \vec{v}) \\
&= (ab - \langle -\vec{u}, -\vec{v} \rangle) + (a(-\vec{v}) + b(-\vec{u}) + (-\vec{u}) \times \vec{v}) \\
&= (ba - \langle -\vec{v}, -\vec{u} \rangle) + a(-\vec{v}) + b(-\vec{u}) - \vec{v} \times (-\vec{u}) \\
&= (ba - \langle -\vec{v}, -\vec{u} \rangle) + b(-\vec{u}) + a(-\vec{v}) + (-\vec{v}) \times (-\vec{u}) \\
&= (b - \vec{v})(a - \vec{u}) = \overline{(b + \vec{v})}\,\overline{(a + \vec{u})} = \overline{r}\,\overline{q}.
\end{aligned}$$

Para os itens (iv), (v) e (vi) seja $q = a + \vec{u}$. Então

$$\overline{\alpha q} = \overline{\alpha(a + \vec{u})} = \overline{(\alpha a) + (\alpha \vec{u})} = (\alpha a) - (\alpha \vec{u}) = \alpha(a - \vec{u}) = \alpha \overline{q},$$

e

$$\begin{aligned}
q\,\overline{q} &= (a + \vec{u})\,\overline{(a + \vec{u})} = (a + \vec{u})(a - \vec{u}) \\
&= (a^2 - \langle \vec{u}, -\vec{u} \rangle) + a(-\vec{u}) + a\vec{u} + \vec{u} \times (-\vec{u}) \\
&= (a^2 + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle) = (a^2 + |\vec{u}|^2) = |q|^2,
\end{aligned}$$

e a igualdade $\overline{q}\,q = |q|^2$ é análoga. Também

$$|\overline{q}|^2 = a^2 + |-\vec{u}|^2 = a^2 + |\vec{u}|^2 = |q|^2,$$

e portanto $|q| = |\overline{q}|$.

Para finalizar, isto é, para o item (vii), seja $q = a + \vec{u}$. Então,

$$q + \overline{q} = (a + \vec{u}) + (a - \vec{u}) = 2a = 2Re(q),$$

e também

$$q - \overline{q} = (a + \vec{u}) - (a - \vec{u}) = 2\vec{u} = 2Im(q),$$

o que termina esta demonstração. □

O uso do conjugado e do módulo de um quatérnio torna mais fácil a ideia de encontrar q^{-1} no caso em que $q \neq 0$. A próxima proposição estabelece esta ideia.

Proposição 34. *Seja $q = (a + \vec{u}) \in \mathbb{H}^*$. Então o inverso de q, o quatérnio $q^{-1} \in \mathbb{H}^*$ que satisfaz $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$, é dado por*

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}(\overline{q}) = \frac{1}{|q|^2}(a - \vec{u}).$$

Demonstração. Se $q = a + \vec{u} \neq 0$, então da proposição 21, segue imediatamente que

$$q^{-1} = \frac{1}{a^2 + |\vec{u}|^2}(a - \vec{u}) = \frac{1}{|q|^2}(a - \vec{u}) = \frac{1}{|q|^2}(\overline{q}).$$

Outra forma de ver isto sem o uso da proposição 21, apenas usando as propriedades do módulo e do conjugado, é a que se segue. Dado $q = (a + \vec{u}) \neq 0$, então $\overline{q} \neq 0$ também, e assim, $\overline{q}$ é invertível. Desta forma,

$$\begin{aligned} q^{-1} &= q^{-1} \cdot 1 = q^{-1} \cdot (\overline{q}^{-1}\overline{q}) \\ &= (q^{-1}\overline{q}^{-1}) \cdot \overline{q} \\ &= (\overline{q}q)^{-1} \cdot \overline{q} = (|q|^2)^{-1} \cdot \overline{q} = \frac{1}{|q|^2}\overline{q}, \end{aligned}$$

donde, $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\overline{q}$. □

5. Potências inteiras de um quatérnio

Definição 35. Se $q \in \mathbb{H}^*$ e $m \in \mathbb{Z}$ então definimos a m-ésima potência de q recursivamente por

$$q^m = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad m = 0, \\ (q^{m-1})q = q(q^{m-1}) \quad \text{se} \quad m > 0, \\ (q^{-1})^{-m} \quad \text{se} \quad m < 0 \end{cases}$$

No caso em que $q = 0$ e $m > 0$ então definimos também $q^m = 0^m = 0$.

Observe que não definimos 0^0, e também 0^{-n} com $n \in \mathbb{N}$, no conjunto dos quatérnios. Isto se deve às mesmas razões que levam 0^0 e 0^{-n} com $n \in \mathbb{N}$, não estarem definidos no conjunto dos números reais ou dos números complexos. Também não temos muito interesse na definição de potências negativas de um quatérnio, uma vez que uma série de potências só abrange as potências positivas. Fizemos esta definição apenas para tornar o texto mais completo.

Vejamos algumas consequências imediatas da definição anterior. A igualdade $q^m = (q^{-1})^{-m}$ usada para o caso em que $m < 0$ é também válida para o caso $m \geq 0$, pois neste caso, $(q^{-1})^{-m} = ((q^{-1})^{-1})^m = (q^m)$. Também é válido que $q^1 = q$ para qualquer $q \in \mathbb{H}$. A igualdade $(q^{m-1})q = q(q^{m-1})$ usada para $m > 0$ é garantida pela associatividade da multiplicação de quatérnios.

Proposição 36. *Se $q \in \mathbb{H}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$ então*

i) $(q^{-1})^n = (q^n)^{-1}$ *quando* $q \neq 0$*;*

ii) $(q^m)(q^n) = q^{m+n}$*;*

iii) $(q^m)^n = q^{mn}$*;*

iv) $|q^n| = |q|^n$*,*

com as devidas restrições $m > 0$ e $n > 0$ no caso em que $q = 0$.

Demonstração. Observamos primeiro que, com exceção de (i), que obriga $q \neq 0$, as demais igualdades são trivialmente satisfeitas se $q = 0$, e portanto vamos considerar em toda esta demonstração que $q \neq 0$. A ideia desta demonstração, em cada item, é primeiro usar indução finita sobre $n \geq 0$ e qualquer que seja $m \in \mathbb{Z}$ quando for o caso, e depois a prova para $n < 0$.

Para a prova de (i), se $n = 0$ temos claramente que $(q^{-1})^0 = 1 = (1)^{-1} = (q^0)^{-1}$. Suponha agora a igualdade válida para n, isto é, $(q^{-1})^n = (q^n)^{-1}$. Para $n+1$, temos que

$$(q^{-1})^{n+1} = (q^{-1})^n \cdot q^{-1} = (q^n)^{-1} \cdot q^{-1} = (q \cdot q^n)^{-1} = (q^{n+1})^{-1}.$$

Agora se $n < 0$ então, usando a definição de potência negativa e a validade da igualdade para potências positivas, temos

$$(q^{-1})^n = ((q^{-1})^{-1})^{-n} = q^{-n} = ((q^{-n})^{-1})^{-1} = ((q^{-1})^{-n})^{-1} = (q^n)^{-1}.$$

Para (ii), se $n = 0$ então trivialmente $(q^m)(q^0) = q^m = q^{m+0}$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$. Suponha agora a igualdade válida para $n \in \mathbb{N}$, isto é, $(q^m) \cdot (q^n) = q^{m+n}$ qualquer que seja $m \in \mathbb{Z}$. Para $n+1$ temos

$$(q^m)(q^{n+1}) = (q^m)((q^n)q) = ((q^m)(q^n))q = (q^{m+n})q = (q^{m+n+1}).$$

Se $n < 0$ então, usando a definição de potência negativa e as igualdades já provadas, temos

$$(q^m)(q^n) = (q^m)(q^{-1})^{-n} = ((q^{-1})^{-m})(q^{-1})^{-n}) = (q^{-1})^{-m-n} = (q^{-1})^{-(m+n)} = (q^{m+n}).$$

Para (iii), o caso $n = 0$ é trivialmente satisfeito pois $(q^m)^0 = 1 = q^0 = q^{m0}$ para qualquer $m \in \mathbb{Z}$. Suponha agora a igualdade válida para $n \in \mathbb{N}$, isto é, $(q^m)^n = q^{mn}$ qualquer que seja $m \in \mathbb{Z}$. Para $n+1$ temos

$$(q^m)^{n+1} = (q^m)^n(q^m) = (q^{mn})(q^m) = q^{mn+m} = q^{m(n+1)}.$$

E para $n < 0$, usando a definição de potência negativa e as igualdades já provadas, temos

$$(q^m)^n = ((q^m)^{-1})^{-n} = ((q^{-1})^m)^{-n} = (q^{-1})^{-mn} = q^{mn}.$$

Para (iv), se $n = 0$ então trivialmente $|q^0| = |1| = 1 = |q|^0$. Suponha agora a igualdade válida para $n \in \mathbb{N}$, isto é, $|q^n| = |q|^n$. Para $n+1$, usando o item (i) da Proposição 28, temos

$$|q^{n+1}| = |q^n q| = |q^n||q| = |q|^n|q| = |q|^{n+1}.$$

E para $n < 0$, usando a definição de potência negativa, as igualdades já provadas e o item (ii) da Proposição 28, temos

$$|q^n| = |(q^{-1})^{-n}| = |q^{-1}|^{-n} = (\tfrac{1}{|q|})^{-n} = |q|^n.$$

□

O leitor poderá perceber que nesta última proposição faltam propriedades conhecidas sobre potências. Ressaltamos que em virtude da não comutatividade da multiplicação dos quatérnios, algumas propriedades sobre potência, válidas para números reais ou complexos, perdem a validade no conjunto dos quatérnios. Como exemplo citamos que não é sempre válida a igualdade $(q_1q_2)^n = (q_1)^n(q_2)^n$. De fato, basta colocar $q_1 = i$, $q_2 = j$, $n = 2$, e temos

$$(ij)^2 = k^2 = -1 \neq 1 = (-1)(-1) = (i^2)(j^2).$$

6. Sequências e séries de quatérnios

O estudo das séries convergentes de quatérnios tem um papel fundamental para este texto. Isto porque a abordagem que escolhemos para definir as funções elementares a valores quatérnios, assunto principal deste texto, é a abordagem por séries de potência. Para o estudo das séries de potência é necessário o estudo também das sequências convergentes.

6.1. Sequências de Quatérnios.

Definição 37. Uma sequência infinita, ou simplesmente uma sequência, de quatérnios é uma sucessão infinita de números quatérnios,

$$q_1, q_2, q_3, ..., q_n, ...,$$

sendo esta sequência representada, da mesma forma que as sequências de números reais ou de números complexos, por $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou ainda de forma mais simplificada, $\{q_n\}$ ou (q_n).

Definição 38. Uma sequência de quatérnios (q_n) é dita ser convergente, se existir algum $q \in \mathbb{H}$ tal que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|q_n - q| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$. Neste caso, dizemos que (q_n) converge para q e escrevemos $q_n \to q$, ou ainda que q é o limite de (q_n) e escrevemos $\lim_{n\to\infty} q_n = q$ ou mais simplesmente $\lim q_n = q$.

No caso de não existir o quatérnio q a que se refere a definição anterior, então a sequência (q_n) é dita não convergente, ou divergente.

Teorema 39. *Suponha que (q_n) é uma sequência de quatérnios. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ suponha que $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$. Então (q_n) converge, se e somente se, (a_n), (b_n), (c_n) e (d_n) convergem. Além disso,*

$$\lim q_n = (\lim a_n) + (\lim b_n)\, i + (\lim c_n)\, j + (\lim d_n)\, k.$$

Demonstração. Suponha primeiro que (q_n) é uma sequência convengente e também que $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ para cada $n \in \mathbb{N}^*$. Seja $q = a + bi + cj + dk$ o limite da sequência (q_n). Mostraremos que $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$ e $d_n \to d$.

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, como $q_n \to q$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|q_n - q| < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$. Desta forma, para todo $n > n_0$, temos

$$\begin{aligned}|a_n - a|^2 &\leq |a_n - a|^2 + |b_n - b|^2 + |c_n - c|^2 + |d_n - d|^2 \\ &= |(a_n - a) + (b_n - b)i + (c_n - c)j + (d_n - d)k|^2 = |q_n - q|^2 < \varepsilon^2,\end{aligned}$$

donde $|a_n - a| < \varepsilon$, e então, $a_n \to a$. Analogamente obteremos que $b_n \to b$, $c_n \to c$ e $d_n \to d$.

Reciprocamente suponha que $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$ e $d_n \to d$. Mostraremos que $q_n \to a + bi + cj + dk$. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para o número real $\frac{\varepsilon}{4} > 0$, existem $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$, tais que

$$\begin{aligned}|a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{sempre que} \quad n > n_1, \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{sempre que} \quad n > n_2, \\ |c_n - c| &< \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{sempre que} \quad n > n_3, \\ |d_n - d| &< \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{sempre que} \quad n > n_4.\end{aligned}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ temos que quando $n > n_0$ então $n > n_1$, $n > n_2$, $n > n_3$ e $n > n_4$ simultaneamente. Portanto, para todo $n > n_0$ temos que,

$$\begin{aligned}|q_n - (a + bi + cj + dk)| &= |(a_n + b_n i + c_n j + d_n k) - (a + bi + cj + dk)| \\ &= |(a_n - a) + (b_n - b)i + (c_n - c)j + (d_n - d)k| \\ &\leq |(a_n - a)| + |(b_n - b)| + |(c_n - c)| + |(d_n - d)| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,\end{aligned}$$

donde $q_n \to (a + bi + cj + dk)$. Para finalizar, basta ver que se $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ converge para $q = a + bi + cj + dk$, então

$$\lim q_n = q = a + bi + cj + dk = (\lim a_n) + (\lim b_n)\, i + (\lim c_n)\, j + (\lim d_n)\, k,$$

como desejado. $\square$

Corolário 40. *Uma sequência (q_n) converge para $q \in \mathbb{H}$, se e somente se, $(Re(q_n))$ e $(Im(q_n))$ convergem respectivamente para $Re(q)$ e $Im(q)$. De outra forma, se $q_n = a_n + \vec{u}_n$ e $q = a + \vec{u}$, então $q_n \to q$, se e somente se $a_n \to a$ e $\vec{u}_n \to \vec{u}$.*

O próximo lema não será demonstrado pois é uma consequência do Teorema 39 e da validade do próprio lema para sequências de números reais.

Lema 41. *Se uma sequência (q_n) de quatérnios converge, então toda subsequência de (q_n) converge para o mesmo limite da sequência (q_n).*

Proposição 42. *Sejam (q_n) e (r_n) sequências de quatérnios convergentes, para q e r respectivamente. Então,*

i) $(\alpha q_n) \to (\alpha q)$, *para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$;

ii) $(q_n + r_n) \to (q + r)$;

iii) $(q_n r_n) \to (qr)$;

iv) $\overline{q_n} \to \overline{q}$;

v) $|q_n| \to |q|$.

Demonstração. Para todos os itens a prova seguirá os mesmos passos do caso de sequências de números reais ou de números complexos.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como por hipótese (q_n) converge para q, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|q_n - q| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|+1}$ sempre que $n > n_0$. Desta forma, para todo $n > n_0$, temos

$$|(\alpha q_n) - (\alpha q)| = |\alpha||q_n - q| < |\alpha|\frac{\varepsilon}{|\alpha| + 1} = \varepsilon\frac{|\alpha|}{|\alpha| + 1} < \varepsilon,$$

donde segue que $(\alpha q_n) \to (\alpha q)$.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como por hipótese (q_n) converge para q, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $|q_n - q| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $n > n_1$. Também como (r_n) converge para r, então existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que $|r_n - r| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $n > n_2$. Escolhemos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, e desta forma, para todo $n > n_0$ temos

$$|(q_n + r_n) - (q + r)| = |q_n - q + r_n - r| \leq |q_n - q| + |r_n - r| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donde segue que $(q_n + r_n) \to (q + r)$.

Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como (q_n) converge para q, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $|q_n - q| < \frac{\varepsilon}{2(|r|+1)}$ sempre que $n > n_1$. Além disso, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, $|q_n - q| < 1$, sempre que $n > n_2$. Então para $n > n_2$ temos,

$$|q_n| = |q_n - q + q| \leq |q_n - q| + |q| < 1 + |q|.$$

Também como (r_n) converge para r, então existe $n_3 \in \mathbb{N}$, tal que $|r_n - r| < \frac{\varepsilon}{2(|q|+1)}$ sempre que $n > n_3$. Escolhemos $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, e então para todo $n > n_0$ temos simultaneamente $n > n_1$, $n > n_2$ e $n > n_3$ e assim,

$$\begin{aligned}
|(q_n r_n) - (qr)| &= |q_n r_n - q_n r + q_n r - qr| \\
&\leq |q_n(r_n - r)| + |(q_n - q)r| \\
&= |q_n||r_n - r| + |q_n - q||r| \\
&< (1 + |q|)\frac{\varepsilon}{2(|q|+1)} + |r|\frac{\varepsilon}{2(|r|+1)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{|r|}{|r|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

donde segue que $(q_n r_n) \to (qr)$.

Dado $\varepsilon > 0$, da hipótese $q_n \to q$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$ cumpre-se $|q_n - q| < \varepsilon$. Logo para todo $n > n_0$ temos,

$$|\overline{q_n} - \overline{q}| = |\overline{q_n - q}| = |q_n - q| < \varepsilon,$$

donde, $\overline{q_n} \to \overline{q}$.

Seja $\varepsilon > 0$. Da hipótese $q_n \to q$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ cumpre-se $|q_n - q| < \varepsilon$. Logo, usando o Corolário 31, para todo $n > n_0$ temos,

$$||q_n| - |q|| \leq |q_n - q| < \varepsilon,$$

o que garante que $|q_n| \to |q|$. Isto termina esta demonstração. $\square$

6.2. Séries de quatérnios.

Definição 43. Dada uma sequência (q_n) de quatérnios, a soma dos infinitos termos q_n é denominada uma série (de quatérnios) e é expressa por

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n + \cdots .$$

Também representaremos uma série de quatérnios simplificadamente por $\sum q_n$, e entendemos que a soma é em $n \in \mathbb{N}^*$.

Definição 44. Dizemos que uma série $\sum q_n$ converge ou é convergente, se existir o limite da sequência (S_m), chamada de sequência das somas parciais, e dada por

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_m.$$

No caso da sequência (S_m), e consequentemente a série $\sum q_n$, convergir então a série é dita ser convergente para o limite da sequência, e escrevemos

$$\sum q_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n = S = \lim_{m\to\infty} S_m = \lim S_m.$$

No caso de não existir o limite da sequência das somas parciais (S_m), então a série $\sum q_n$ é dita divergente ou não convergente.

Teorema 45. *Suponha que (q_n) é uma sequência de quatérnios, e para cada $n \in \mathbb{N}^*$ suponha que $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$. Então $\sum q_n$ converge, se e somente se, $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ convergem. Além disso,*

$$\sum q_n = \left(\sum a_n\right) + \left(\sum b_n\right) i + \left(\sum c_n\right) j + \left(\sum d_n\right) k.$$

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}^*$, seja

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{n=1}^{m} q_n = \sum_{n=1}^{m} (a_n + b_n i + c_n j + d_n k) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{m} a_n\right) + \left(\sum_{n=1}^{m} b_n\right) i + \left(\sum_{n=1}^{m} c_n\right) j + \left(\sum_{n=1}^{m} d_n\right) k \\ &= A_m + B_m i + C_m j + D_m k, \end{aligned}$$

sendo que (A_m), (B_m), (C_m) e (D_m) são as sequências (de números reais) das somas parciais das séries $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ respecivamente.

Agora temos então da definição de série convergente que $\sum q_n$ converge se e somente se (S_m) converge. Do Teorema 39, (S_m) converge se e somente se (A_m), (B_m), (C_m) e (D_m) convergem. Dos resultados de sequências e séries de números reais, (A_m), (B_m), (C_m) e (D_m) convergem se e somente se $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ convergem.

Segue que $\sum q_n$ converge se e somente se $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ convergem. Além disso,

$$\begin{aligned} \sum q_n = \lim S_m &= (\lim A_m) + (\lim B_m) i + (\lim C_m) j + (\lim D_m) k \\ &= \left(\sum a_n\right) + \left(\sum b_n\right) i + \left(\sum c_n\right) j + \left(\sum d_n\right) k. \end{aligned}$$

□

Corolário 46. *Uma série $\sum q_n$ converge se, e somente se, convergem as séries $\sum Re(q_n)$ e $\sum Im(q_n)$. Além disso,*

$$\sum q_n = \sum Re(q_n) + \sum Im(q_n).$$

Teorema 47. *Se $\sum q_n$ converge, então $q_n \to 0$.*

Demonstração. Sejam

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} q_n, \qquad \text{e} \qquad S = \lim S_m.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, temos que $q_n = S_n - S_{n-1}$. Sendo (S_{n-1}) uma subsequência da sequência (S_n), o lema 41 garante que (S_{n-1}) converge para o mesmo limite de (S_n). Segue que

$$\lim q_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0,$$

donde $q_n \to 0$. □

O próximo corolário não será provado pois é a contrapositiva equivalente do teorema anterior.

Corolário 48. *Dada uma sequência de quatérnios (q_n), se q_n não converge para zero então $\sum q_n$ é divergente.*

Definição 49. Uma série $\sum q_n$ é dita absolutamente convergente se, e somente se, $\sum |q_n|$ for convergente.

Observe que na definição anterior, embora $\sum q_n$ seja uma série de quatérnios, a série $\sum |q_n|$ é uma série de números reais positivos.

Teorema 50. *Se $\sum q_n$ é absolutamente convergente, então $\sum q_n$ é convergente.*

Demonstração. Suponha que $\sum q_n$ é absolutamente convergente. Da definição de série absolutamente convergente segue então que $\sum |q_n|$ é uma série (de números reais) convergente.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, seja $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$. Como

$$|a_n| \leq |q_n|,$$

para cada $n \in \mathbb{N}^*$, então do teste da comparação para séries de números reais temos que $\sum |a_n|$ é convergente. Então $\sum a_n$ é uma série de números reais absolutamente convergente, e portanto convergente. Pela mesma razão, $\sum b_n$, $\sum c_n$ e $\sum d_n$ são séries convergentes. Segue do Teorema 45 que $\sum q_n$ converge. □

O teorema que acabamos de provar tem grande importância. Ele permite que usemos conhecimentos sobre a série de números reais $\sum |q_n|$ para decidir a convergência da série de números quatérnios $\sum q_n$. Dentre outras vantagens podemos fazer uso de dois importantes testes de convergência de séries de números reais, a saber, os testes da razão e da raiz.

Teorema 51 (Teste da Razão). *Seja $\sum q_n$ uma série de quatérnios e suponha que*

$$\lim \left| \frac{q_{n+1}}{q_n} \right| = L.$$

Então, se $L < 1$, a série $\sum q_n$ é (absolutamente) convergente.

Demonstração. Supondo $\lim \frac{|q_{n+1}|}{|q_n|} = L < 1$, então pelo teste da razão para séries de números reais, a série $\sum |q_n|$ é uma série convergente. Seque que $\sum q_n$ é absolutamente convergente e então do Teorema 50, é uma série convergente. □

Teorema 52 (Teste da Raiz). *Seja $\sum q_n$ uma série de quatérnios e suponha que*

$$\lim \sqrt[n]{|q_n|} = L.$$

Se $L < 1$, a série $\sum q_n$ é (absolutamente) convergente.

Demonstração. Como $\lim \sqrt[n]{|q_n|} = L < 1$, então pelo teste da raiz para séries de números reais, a série $\sum |q_n|$ é uma série convergente. Seque que $\sum q_n$ é absolutamente convergente e portanto convergente. □

Podemos também provar, nos dois últimos teoremas que se $L > 1$ então em qualquer um dos testes a série $\sum q_n$ é divergente. Não enunciamos nem demonstramos esta afirmação porque ela não nos interessa diretamente neste texto. Também, lembremos que ambos os testes são inconclusivos se $L = 1$. É possível obter séries divergentes e convergentes que cumprem $L = 1$ em ambos os testes. Neste caso, isto é, quando $L = 1$, outro teste deve ser aplicado.

7. Funções elementares no conjunto dos quatérnios

Vamos agora definir algumas das funções elementares a valores quatérnios. Estamos particularmente interessados nas funções exponencial, trigonométricas e trigonométricas hiperbólicas de um quatérnio. O método que usaremos é a abordagem por séries de potência.

Durante toda esta etapa, dado um quatérnio $q = a + \vec{u}$, estaremos supondo que $\vec{u} \neq \vec{0}$ e consequentemente que $|\vec{u}| \neq 0$. Isto se deve ao fato de que se $\vec{u} = \vec{0}$ então podemos considerar que $q = a + \vec{0} \in \mathbb{R}$, e está fora dos nossos interesses (re)estudar as funções elementares no conjunto dos números reais.

7.1. A função exponencial. Sabemos que se $x \in \mathbb{R}$, então é válida a igualdade

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

A série de potências do lado direito faz sentido se $x \in \mathbb{H}$, desde que a série seja convergente. Verificaremos então quais os valores de $x \in \mathbb{H}$ tais que a série converge.

Dado $q \in \mathbb{H}$ arbitrário, considerando a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$, e aplicando o teste da razão, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{q^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{q^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|q|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|}{(n+1)} = 0 < 1,$$

donde segue que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$ é absolutamente convergente, e portanto convergente, qualquer que seja $q \in \mathbb{H}$. Usamos então a igualdade em série de potências da função exponencial de variável real para definir a função exponencial de um quatérnio.

Definição 53. Dado $q \in \mathbb{H}$, definimos a exponencial de q, como sendo o quatérnio representado por e^q, e dado por

$$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \frac{q^4}{4!} + \cdots . \tag{7}$$

Observe que assumimos nesta igualdade que $q^0 = 1$ independente do quatérnio $q \in \mathbb{H}$. Esta convenção é por pura simplicidade para não sermos obrigados a escrever $e^q = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$. Apesar desta definição ser importante, queremos obter uma expressão mais simples que nos permita mais facilmente calcular e^q para um dado $q \in \mathbb{H}$.

Lembremos primeiro que, dados $x, y \in \mathbb{R}$ então é válida a expansão binomial

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r,$$

e esta igualdade não é verdadeira para todos $x, y \in \mathbb{H}$, em virtude da não comutatividade do produto entre quatérnios. Entretanto se $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{H}$ então $xy = yx$ e neste caso a expansão binomial fica válida para o termo $(a+\vec{u})^n$. Segue então que

$$(a+\vec{u})^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} \vec{u}^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^r. \tag{8}$$

Aplicando a expansão binomial podemos reescrever a igualdade (7) na forma

$$\begin{aligned} e^q &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a+\vec{u})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^r. \end{aligned}$$

O lema a seguir nos ajudará a trabalhar com o somatório duplo do segundo membro desta última igualdade.

Lema 54. *Para qualquer $m \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m} = e^a \frac{1}{m!} \vec{u}^m + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m+1)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m+1}.$$

Demonstração. Dado qualquer $m \in \mathbb{N}$ e começando com

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m},$$

vamos separar o caso $n = 0$ do somatório externo, e depois os casos $r = 0$ do somatório interno. Desta forma, para qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m} \\ &\quad = \frac{1}{m!} a^0 \vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m} \\ &\quad = \frac{1}{m!} \vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m!n!} a^n \vec{u}^m + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r} \vec{u}^{r+m} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m!n!} a^n \vec{u}^m + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{(r+m)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m e^a + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{n+1} \frac{1}{(r+m)!(n+1-r)!} a^{n+1-r}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m e^a + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+m+1)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+m+1}.
\end{aligned}$$

□

Usando agora repetidamente este lema temos que

$$\begin{aligned}
e^q &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^r \\
&= e^a + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+1)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+1} \\
&= e^a + e^a\vec{u} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+2)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+2} \\
&= e^a + e^a\vec{u} + e^a\frac{1}{2!}\vec{u}^2 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+3)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+3} \\
&= e^a + e^a\vec{u} + e^a\frac{1}{2!}\vec{u}^2 + e^a\frac{1}{3!}\vec{u}^3 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+4)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+4} \\
&= e^a + e^a\vec{u} + e^a\frac{1}{2!}\vec{u}^2 + e^a\frac{1}{3!}\vec{u}^3 + e^a\frac{1}{4!}\vec{u}^4 + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(r+5)!(n-r)!} a^{n-r}\vec{u}^{r+5},
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Desta forma, obtemos

$$e^q = \sum_{n=0}^{\infty} e^a \frac{1}{n!}\vec{u}^n = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\vec{u}^n. \tag{9}$$

De acordo com a definição de multiplicação de quatérnios, podemos ver que,

$$\vec{u}^2 = (0+\vec{u})(0+\vec{u}) = (0 - \langle\vec{u},\vec{u}\rangle) + (0\vec{u} + 0\vec{u} + \vec{u}\times\vec{u}) = -\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = -|\vec{u}|^2,$$

e então quando $n = 2r$ é par, temos que

$$\vec{u}^n = \vec{u}^{2r} = (\vec{u}^2)^r = (-|\vec{u}|^2)^r = (-1)^r|\vec{u}|^{2r},$$

e quando $n = 2r+1$ é impar,

$$\vec{u}^n = \vec{u}^{2r+1} = \vec{u}^{2r}\vec{u} = (-1)^r|\vec{u}|^{2r}\vec{u}.$$

Separando o somatório em (9), nas suas parcelas com n par e com n ímpar, temos

$$\begin{aligned}
e^q &= e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\vec{u}^n \\
&= e^a \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\vec{u}^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\vec{u}^{2n+1} \right) \\
&= e^a \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n|\vec{u}|^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n|\vec{u}|^{2n}\vec{u} \right) \\
&= e^a \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-1)^n|\vec{u}|^{2n} + \vec{u}\frac{1}{|\vec{u}|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n|\vec{u}|^{2n+1} \right) \\
&= e^a \left(\cos(|\vec{u}|) + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}(|\vec{u}|) \right),
\end{aligned}$$

sendo que a penúltima igualdade se justifica pois $|\vec{u}| \neq 0$.

Segue finalmente que para $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$ a exponencial de q é dada por

$$e^q = e^a \left(\cos(|\vec{u}|) + \frac{\operatorname{sen}(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|}\vec{u} \right).$$

Formalmente temos então uma definição alternativa para a exponencial de um quatérnio sem o uso explícito das séries de potência.

Definição 55. Dado $q = (a + \vec{u}) \in \mathbb{H}$, definimos a exponencial de q, como sendo o quatérnio representado por e^q, e dado por

$$e^q = e^a \left(\cos|\vec{u}| + \frac{\operatorname{sen}|\vec{u}|}{|\vec{u}|}\vec{u} \right) = e^a \left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}| \right), \tag{10}$$

quando $|\vec{u}| \neq 0$ e por $e^q = e^a$ quando $|\vec{u}| = 0$.

A seguir apresentamos algumas igualdades da função exponencial de variável quaterniônica. São propriedades válidas para variáveis reais ou complexas. A demonstração não apresenta dificuldades técnicas.

Proposição 56. *Para qualquer quatérnio $q = a + \vec{u}$, tem-se*

i) $e^q = e^a e^{\vec{u}}$,

ii) $|e^q| = e^a$,

iii) $e^q \neq 0$,

iv) $|e^{\vec{u}}| = 1$,

v) $e^{-q} = (e^q)^{-1}$.

Demonstração. Todas as igualdades são triviais se $\vec{u} = \vec{0}$, pois recaem ao caso real. Vamos então considerar agora $q = a + \vec{u}$ um quatérnio arbitrário com $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Para estabelecer o item (i) basta ver que

$$e^{\vec{u}} = e^{0+\vec{u}} = \left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right),$$

e sendo e^a um número real,

$$e^a e^{\vec{u}} = e^a\left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right) = e^q.$$

Para o item (ii), temos que

$$\begin{aligned}
|e^q|^2 &= \left|e^a\left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right)\right|^2 \\
&= \left|e^a\cos|\vec{u}| + \frac{e^a\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right|^2 \\
&= (e^a\cos|\vec{u}|)^2 + \left|\frac{e^a\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right|^2 \\
&= e^{2a}\cos^2|\vec{u}| + \frac{e^{2a}|\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2}\operatorname{sen}^2|\vec{u}| \\
&= e^{2a}\left(\cos^2|\vec{u}| + \operatorname{sen}^2|\vec{u}|\right) = e^{2a},
\end{aligned}$$

e a igualdade desejada segue agora extraindo raiz quadrada em ambos os membros.

O item (iii) é uma consequência imediata do item (ii). Já que $|e^q| = e^a \neq 0$ qualquer que seja $q = a + \vec{u}$, e o módulo de um quatérnio é nulo se e somente se o quatérnio é nulo, então segue que $e^q \neq 0$ qualquer que seja q.

O item (iv) é também consequência imediata dos itens anteriores, pois

$$e^a|e^{\vec{u}}| = |e^a e^{\vec{u}}| = |e^q| = e^a,$$

e a igualdade desejada segue dividindo ambos os membros por e^a.

Finalmente para o item (v) temos que como $e^q \neq 0$ então e^q é invertível. Além disso, de acordo com a proposição 34, é válida a igualdade

$$(e^q)^{-1} = \left(\frac{1}{|e^q|^2}\right)\overline{e^q}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
(e^q)^{-1} = \left(\frac{1}{|e^q|^2}\right)\overline{e^q} &= \left(\frac{1}{e^{2a}}\right)\overline{e^a\left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right)} \\
&= \frac{1}{e^{2a}}e^a\left(\cos|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right) \\
&= e^{-a}\left(\cos|-\vec{u}| + \frac{-\vec{u}}{|-\vec{u}|}\operatorname{sen}|-\vec{u}|\right) = e^{-q},
\end{aligned}
$$

e isto termina esta demonstração. □

É preciso tomar cuidado ao admitir a validade de expressões para o caso quatérnio, que são clássicas para a exponencial de variável real ou de variável complexa. É fácil ver que $e^{q+r} = e^q e^r$ não é válida para quaisquer que sejam $q, r \in \mathbb{H}$. De fato, basta ver que

$$e^{i+j} = \cos\sqrt{2} + (i+j)\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\sqrt{2},$$

e no entanto

$$e^i e^j = (\cos 1 + i\operatorname{sen} 1)(\cos 1 + j\operatorname{sen} 1) = \cos^2 1 + (i+j)(\operatorname{sen} 1)(\cos 1) + k\operatorname{sen}^2 1.$$

7.2. As funções trigonométricas. Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, é válida a expressão,

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A série de potências do lado direito faz sentido se $x \in \mathbb{H}$, desde que a série seja convergente. Verificaremos para quais valores de $q \in \mathbb{H}$ isso acontece. Dado $q \in \mathbb{H}$ arbitrário, temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{|q_{n+1}|}{|q_n|} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{q^{2n+3}}{(2n+3)!}\right|}{\left|(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{|q|^{2n+3}}{(2n+3)!}\frac{(2n+1)!}{|q|^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|q|^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1.
\end{aligned}
$$

Segue, do teste da razão, que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!}$ é absolutamente convergente, e portanto convergente, qualquer que seja $q \in \mathbb{H}$. Com isto, podemos então definir a função seno de um quatérnio q pela igualdade em série de potência.

Definição 57. Dado um quatérnio q, o seno de q é o quatérnio representado por $\operatorname{sen} q$, dado pela expressão

$$\operatorname{sen}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Como no caso da função exponencial, queremos obter uma expressão mais simples que nos permita calcular o valor do seno de um número quatérnio sem a necessidade de determinar a soma da série.

Para isto, considere $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$. Aplicando a definição anterior temos

$$\operatorname{sen}(q) = (a+\vec{u}) - \frac{(a+\vec{u})^3}{3!} + \frac{(a+\vec{u})^5}{5!} - \frac{(a+\vec{u})^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{(a+\vec{u})^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{11}$$

Usando novamente a expansão binomial (8), podemos reescrever (11) como

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} q^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (a+\vec{u})^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{r!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^r \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{r!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^r.
\end{aligned}$$

O próximo lema será útil para trabalhar com o somatório duplo do segundo membro desta última igualdade.

Lema 58. *Para qualquer $m \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m} \\
&\quad = \frac{1}{m!} \vec{u}^m \operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!} \vec{u}^{m+1} \cos(a) \\
&\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m+2)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m+2}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Tomando

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m},$$

vamos separar o caso $n = 0$ do somatório externo, e depois os casos $r = 0$ do somatório interno. Desta forma, para qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m!}a\vec{u}^m + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}a\vec{u}^m + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{m!(2n+1)!}a^{2n+1}\vec{u}^m + \sum_{r=1}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m}\right) \\
&= \frac{1}{m!}a\vec{u}^m + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m!(2n+1)!}a^{2n+1}\vec{u}^m \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\left(a + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a^{2n+1}\right) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m}.
\end{aligned}
$$

Separando novamente os temos em $r = 1$ do somatório interno, temos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(m+1)!(2n)!}a^{2n}\vec{u}^{m+1} + \sum_{r=2}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m}\right) \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+1)!(2n)!}a^{2n}\vec{u}^{m+1} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=2}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}a^{2n}\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=2}^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1}\cos(a) \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=2}^{2n+3}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r+3)!}a^{2n-r+3}\vec{u}^{r+m}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{m!}\vec{u}^m \operatorname{sen}(a) + \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1}\cos(a)$$
$$- \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m+2)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m+2}.$$

□

Usando agora repetidamente este lema temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{r!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^r \\
&= \operatorname{sen}(a) + \vec{u}\cos(a) - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+2)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+2} \\
&= \operatorname{sen}(a) + \vec{u}\cos(a) - \frac{1}{2!}\vec{u}^2\operatorname{sen}(a) - \frac{1}{3!}\vec{u}^3\cos(a) \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+4)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+4} \\
&= \operatorname{sen}(a) + \vec{u}\cos(a) - \frac{1}{2!}\vec{u}^2\operatorname{sen}(a) - \frac{1}{3!}\vec{u}^3\cos(a) + \frac{1}{4!}\vec{u}^4\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{5!}\vec{u}^5\cos(a) \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+6)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+6} \\
&= \operatorname{sen}(a) + \vec{u}\cos(a) - \frac{1}{2!}\vec{u}^2\operatorname{sen}(a) - \frac{1}{3!}\vec{u}^3\cos(a) + \frac{1}{4!}\vec{u}^4\operatorname{sen}(a) + \frac{1}{5!}\vec{u}^5\cos(a) \\
&\qquad - \frac{1}{6!}\vec{u}^6\operatorname{sen}(a) - \frac{1}{7!}\vec{u}^7\cos(a) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+8)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+8},
\end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Desta forma, obtemos

$$\operatorname{sen}(q) = \operatorname{sen}(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\vec{u}^{2n} + \cos(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\vec{u}^{2n+1},$$

e usando novamente que $\vec{u}^{2n} = (-1)^n|\vec{u}|^{2n}$, e que $\vec{u}^{2n+1} = (-1)^n|\vec{u}|^{2n}\vec{u}$, então temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(q) &= \operatorname{sen}(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(-1)^n|\vec{u}|^{2n} + \cos(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(-1)^n|\vec{u}|^{2n}\vec{u} \\
&= \operatorname{sen}(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}|\vec{u}|^{2n} + \vec{u}\frac{1}{|\vec{u}|}\cos(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}|\vec{u}|^{2n+1} \\
&= \operatorname{sen}(a)\cosh(|\vec{u}|) + \vec{u}\frac{1}{|\vec{u}|}\cos(a)\operatorname{senh}(|\vec{u}|),
\end{aligned}$$

sendo que nas duas últimas expressões usamos o fato de que $|\vec{u}| \neq 0$. Temos portanto a definição que se segue.

Definição 59. Dado $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, o seno de q é o quatérnio denotado por $\operatorname{sen}(q)$, ou $\operatorname{sen} q$, e dado por,

$$\operatorname{sen} q = \operatorname{sen}(a)\cosh|\vec{u}| + \vec{u}\frac{1}{|\vec{u}|}\cos(a)\operatorname{senh}|\vec{u}|, \tag{12}$$

se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e por $\operatorname{sen} q = \operatorname{sen} a$ no caso em que $Im(q) = \vec{u} = \vec{0}$.

Repetiremos o processo anterior para a função cosseno. Sabemos que para todo $x \in \mathbb{R}$, é válida a espansão em série de potência

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A série de potências do lado direito faz sentido se $x \in \mathbb{H}$, desde que a série seja convergente. Vamos verificar para quais quatérnios esta convergência é satisfeita. Dado $q \in \mathbb{H}$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{|q_{n+1}|}{|q_n|} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{q^{2n+2}}{(2n+2)!}\right|}{\left|(-1)^n\frac{q^{2n}}{(2n)!}\right|}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{|q|^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{|q|^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|q|^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1.\end{aligned}$$

Segue, do teste da razão, que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{2n}}{(2n)!}$ é absolutamente convergente, e consequentemente convergente qualquer que seja $q \in \mathbb{H}$. Podemos então definir, pela série de potência, o cosseno de um quatérnio.

Definição 60. Dado um quatérnio arbitrário q, definimos o cosseno de q como sendo o quatérnio representado por $\cos(q)$, e determinado por

$$\cos q = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{2n}}{(2n)!}.$$

Novamente esta definição é importante, mas queremos obter uma expressão mais simples que nos permita calcular o valor do cosseno de um quatérnio sem determinar a soma da série. Usando a expressão binomial (8), podemos escrever

$$\begin{aligned}\cos q &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}q^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(a+\vec{u})^{2n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{r=0}^{2n}\frac{(2n)!}{r!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^r = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{r!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^r.\end{aligned}$$

O lema a seguir servirá para tratar o somatório duplo do segundo membro desta última igualdade.

Lema 61. *Para qualquer $m \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}&\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}\\ &=\frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a)-\frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1}\operatorname{sen}(a)\\ &\qquad-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m+2)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m+2}.\end{aligned}$$

Demonstração. Começando com

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}$$

vamos separar o caso $n=0$ do somatório externo, e depois os casos $r=0$ do somatório interno. Desta forma, para qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}&\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}\\ &=\frac{1}{m!}\vec{u}^m+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}\\ &=\frac{1}{m!}\vec{u}^m+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{m!(2n)!}a^{2n}\vec{u}^m+\sum_{r=1}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}\right)\\ &=\frac{1}{m!}\vec{u}^m+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{m!(2n)!}a^{2n}\vec{u}^m+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}\\ &=\frac{1}{m!}\vec{u}^m\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}a^{2n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n}\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r}\vec{u}^{r+m}\\ &=\frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{n+1}}{(r+m)!(2n-r+2)!}a^{2n-r+2}\vec{u}^{r+m}\\ &=\frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1}\frac{(-1)^{n+1}}{(r+m+1)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m+1}\\ &=\frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a)-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1}\frac{(-1)^{n}}{(r+m+1)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m+1}.\end{aligned}$$

Separando novamente os temos em $r=0$ do somatório interno, temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n}&\frac{(-1)^n}{(r+m)!(2n-r)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m}\\ &=\frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a)-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{2n+1}\frac{(-1)^{n}}{(r+m+1)!(2n-r+1)!}a^{2n-r+1}\vec{u}^{r+m+1}\\ &=\frac{1}{m!}\vec{u}^m\cos(a)-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(m+1)!(2n+1)!}a^{2n+1}\vec{u}^{m+1}\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \sum_{r=1}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m+1)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m+1} \Bigg) \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m \cos(a) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+1)!(2n+1)!} a^{2n+1} \vec{u}^{m+1} \\
&\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(r+m+1)!(2n-r+1)!} a^{2n-r+1} \vec{u}^{r+m+1} \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m \cos(a) - \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a^{2n+1} \\
&\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{(r+m+2)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+m+2}. \\
&= \frac{1}{m!}\vec{u}^m \cos(a) - \frac{1}{(m+1)!}\vec{u}^{m+1} \operatorname{sen}(a) \\
&\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{(r+m+2)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+m+2}.
\end{aligned}
$$

□

Usando agora repetidamente este lema temos que

$$
\begin{aligned}
\cos(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{r!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^r \\
&= \cos(a) - \operatorname{sen}(a)\vec{u} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{(r+2)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+2} \\
&= \cos(a) - \operatorname{sen}(a)\vec{u} - \frac{1}{2!}\vec{u}^2 \cos(a) + \frac{1}{3!}\vec{u}^3 \operatorname{sen}(a) \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{(r+4)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+4} \\
&= \cos(a) - \operatorname{sen}(a)\vec{u} - \frac{1}{2!}\vec{u}^2 \cos(a) + \frac{1}{3!}\vec{u}^3 \operatorname{sen}(a) + \frac{1}{4!}\vec{u}^4 \cos(a) - \frac{1}{5!}\vec{u}^5 \operatorname{sen}(a) \\
&\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^{n+1}}{(r+6)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+6} \\
&= \cos(a) - \operatorname{sen}(a)\vec{u} - \frac{1}{2!}\vec{u}^2 \cos(a) + \frac{1}{3!}\vec{u}^3 \operatorname{sen}(a) + \frac{1}{4!}\vec{u}^4 \cos(a) - \frac{1}{5!}\vec{u}^5 \operatorname{sen}(a) \\
&\qquad - \frac{1}{6!}\vec{u}^6 \cos(a) + \frac{1}{7!}\vec{u}^7 \operatorname{sen}(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{(r+8)!(2n-r)!} a^{2n-r} \vec{u}^{r+8}
\end{aligned}
$$

e assim sucessivamente. Desta forma, obtemos

$$
\cos q = \cos(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \vec{u}^{2n} - \operatorname{sen}(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \vec{u}^{2n+1},
$$

e usando que $\vec{u}^{2n} = (-1)^n |\vec{u}|^{2n}$ e que $\vec{u}^{2n+1} = (-1)^n |\vec{u}|^{2n} \vec{u}$, obtemos

$$
\cos q = \cos(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (-1)^n |\vec{u}|^{2n} - \operatorname{sen}(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (-1)^n |\vec{u}|^{2n} \vec{u}
$$

$$= \cos(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} |\vec{u}|^{2n} - \vec{u} \frac{1}{|\vec{u}|} \operatorname{sen}(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} |\vec{u}|^{2n+1}$$
$$= \cos(a) \cosh(|\vec{u}|) - \vec{u} \frac{1}{|\vec{u}|} \operatorname{sen}(a) \operatorname{senh}(|\vec{u}|),$$

sendo que as duas últimas expressões se justificam pois $|\vec{u}| \neq 0$. Desta forma, redefinimos o cosseno de um quatérnio de uma forma mais simples.

Definição 62. Dado $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, o cosseno de q é o quatérnio denotado por $\cos q$, ou $\cos(q)$, dado por

$$\cos q = \cos(a) \cosh |\vec{u}| - \vec{u} \frac{1}{|\vec{u}|} \operatorname{sen}(a) \operatorname{senh} |\vec{u}|, \tag{13}$$

se $\vec{u} \neq \vec{0}$, e por $\cos q = \cos a$ no caso em que $Im(q) = \vec{u} = \vec{0}$.

É imediato desta definição que $\cos 0 = 1$ e que $\operatorname{sen} 0 = 0$. Também, no caso em que $\vec{u} = bi + 0j + 0k$ então as expressões (12) e (13) recuperam as clássicas definições de seno e cosseno de números complexos

$$\operatorname{sen}(a + bi) = \operatorname{sen} a \cosh b + i \cos a \operatorname{senh} b,$$
$$\cos(a + bi) = \cos a \cosh b - i \operatorname{sen} a \operatorname{senh} b,$$

em virtude das igualdades

$$\cosh(b) = \cosh(-b) = \cosh(|b|) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{senh}(b) = \operatorname{senh}\left(\tfrac{b}{|b|}|b|\right) = \frac{b}{|b|} \operatorname{senh}(|b|),$$

pois $\frac{b}{|b|} = \pm 1$, é apenas o sinal de b. Desta forma temos que as expressões são extensões das definições de seno e cosseno de variável real ou variável complexa ao caso quatérnio.

Algumas propriedades fundamentais da trigonometria podem ser provadas também para o caso quatérnio. Os próximos resultados estabelecem algumas destas propriedades.

Proposição 63. *Seja $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$. São válidas as identidades*

i) $\operatorname{sen}^2 q + \cos^2 q = 1$,

ii) $\operatorname{sen}(-q) = -(\operatorname{sen} q)$,

iii) $\cos(-q) = \cos q$,

Demonstração. Suponha que $q = a + \vec{u}$ é um quatérnio arbitrário. Se $\vec{u} = \vec{0}$ então não há o que mostrar pois estas identidades são válidas para argumentos reais. Vamos então provar os três itens para $\vec{u} \neq \vec{0}$, usando diretamente as expressões (12) e (13).

Para provar (i), lembremos que $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ e temos que

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}^2 q + \cos^2 q \\
&\quad = \left(\operatorname{sen} a \cosh|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\cos a \operatorname{senh}|\vec{u}|\right)^2 + \left(\cos a \cosh|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a \operatorname{senh}|\vec{u}|\right)^2 \\
&\quad = \operatorname{sen}^2 a \cosh^2|\vec{u}| - \frac{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}{|\vec{u}|^2}\cos^2 a \operatorname{senh}^2|\vec{u}| + \frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a \cosh|\vec{u}| \cos a \operatorname{senh}|\vec{u}| \\
&\qquad + \cos^2 a \cosh^2|\vec{u}| - \frac{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}{|\vec{u}|^2}\operatorname{sen}^2 a \operatorname{senh}^2|\vec{u}| - \frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|}\cos a \cosh|\vec{u}| \operatorname{sen} a \operatorname{senh}|\vec{u}| \\
&\quad = \operatorname{sen}^2 a \cosh^2|\vec{u}| - \cos^2 a \operatorname{senh}^2|\vec{u}| + \cos^2 a \cosh^2|\vec{u}| - \operatorname{sen}^2 a \operatorname{senh}^2|\vec{u}| \\
&\quad = (\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a)\cosh^2|\vec{u}| - (\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a)\operatorname{senh}^2|\vec{u}| \\
&\quad = \cosh^2|\vec{u}| - \operatorname{senh}^2|\vec{u}| = 1.
\end{aligned}$$

Os itens (ii) e (iii) seguem imediatamente da validade da mesma expressão para o caso real. De fato,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(-q) &= \operatorname{sen}(-a)\cosh|-\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|-\vec{u}|}\cos(-a)\operatorname{senh}|-\vec{u}| \\
&= -\operatorname{sen} a \cosh|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\cos a \operatorname{senh}|\vec{u}| = -\operatorname{sen} q,
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\cos(-q) &= \cos(-a)\cosh|-\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|-\vec{u}|}\operatorname{sen}(-a)\operatorname{senh}|-\vec{u}| \\
&= \cos a \cosh|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a \operatorname{senh}|\vec{u}| = \cos q.
\end{aligned}$$

□

Proposição 64. *Se $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor arbitrário, então são válidas as identidades*

i) $\operatorname{sen}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{senh}|\vec{u}|$, *desde que* $\vec{u} \neq \vec{0}$,

ii) $\cos(\vec{u}) = \cosh|\vec{u}|$.

Demonstração. Basta aplicar as expressões (12) e (13) com $a = 0$. □

É conhecido também que, se $x \in \mathbb{R}$, ou se $x \in \mathbb{C}$, então são válidas as identidades

$$\operatorname{sen} x = \frac{(-i)}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) \qquad \text{e} \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}). \tag{14}$$

Podemos generalizar estas identidades para o caso quatérnio também. Este é o assunto da próxima proposição.

Proposição 65. *Se $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$ com $\vec{u} \neq \vec{0}$, então temos que*

$$\operatorname{sen} q = \frac{-\vec{u}}{2|\vec{u}|}\left(e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} - e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) = \frac{-\vec{u}}{2|\vec{u}|}\left(e^{\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}q} - e^{-\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}q}\right),$$

e também

$$\cos q = \frac{1}{2}\left(e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} + e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}q} + e^{-\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}q}\right).$$

Demonstração. Consideremos $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$ com $\vec{u} \neq \vec{0}$, temos que

$$e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} = e^{(a+\vec{u})\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} = e^{-\frac{1}{|\vec{u}|}\langle\vec{u},\vec{u}\rangle + a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}},$$

e como $\frac{1}{|\vec{u}|}\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = \frac{1}{|\vec{u}|}|\vec{u}|^2 = |\vec{u}|$, então

$$e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} = e^{-|\vec{u}| + a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} = e^{-|\vec{u}|}\left(\cos\left|a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right| + \frac{a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}{\left|a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|}\operatorname{sen}\left|a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|\right)$$

e levando em conta que $\frac{a}{|a|}\operatorname{sen}|a| = \operatorname{sen}(\frac{a}{|a|}|a|) = \operatorname{sen} a$ pois $\frac{a}{|a|} = \pm 1$ é o sinal de a, e como a função seno é uma função ímpar, este sinal passa ao argumento, então

$$e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} = e^{-|\vec{u}|}\left(\cos|a| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{a}{|a|}\operatorname{sen}|a|\right) = e^{-|\vec{u}|}\left(\cos a + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right). \tag{15}$$

Procedendo da mesma forma temos que

$$\begin{aligned} e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} &= e^{|\vec{u}| - a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} \\ &= e^{|\vec{u}|}\left(\cos\left|-a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right| - \frac{a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}{\left|-a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|}\operatorname{sen}\left|-a\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|\right) \\ &= e^{|\vec{u}|}\left(\cos|a| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{a}{|a|}\operatorname{sen}|a|\right) = e^{|\vec{u}|}\left(\cos a - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Usando então as igualdades (15) e (16), temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} + e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) &= \frac{1}{2}e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} + \frac{1}{2}e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} \\ &= \frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\left(\cos a + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right) + \frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\left(\cos a - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\cos a + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\operatorname{sen} a + \frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\cos a - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\operatorname{sen} a \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-|\vec{u}|} + e^{|\vec{u}|}\right)\cos a - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{1}{2}\left(e^{|\vec{u}|} - e^{-|\vec{u}|}\right)\operatorname{sen} a \\
&= \cos a \cosh|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a \operatorname{senh}|\vec{u}| = \cos q.
\end{aligned}
$$

Também

$$
\begin{aligned}
\frac{-\vec{u}}{2|\vec{u}|}\left(e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} - e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) &= \frac{-\vec{u}}{|\vec{u}|}\left(\frac{1}{2}e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} - \frac{1}{2}e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) \\
&= \frac{-\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\left(\cos a + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right) + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\left(\cos a - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen} a\right),
\end{aligned}
$$

e levando em conta que $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = -\frac{1}{|\vec{u}|^2}\langle\vec{u},\vec{u}\rangle = -\frac{|\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} = -1$, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{-\vec{u}}{2|\vec{u}|}\left(e^{q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}} - e^{-q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}}\right) &= \frac{-\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\cos a + \frac{e^{-|\vec{u}|}}{2}\operatorname{sen} a + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\cos a + \frac{e^{|\vec{u}|}}{2}\operatorname{sen} a \\
&= \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{1}{2}\left(e^{|\vec{u}|} - e^{-|\vec{u}|}\right)\cos a + \frac{1}{2}\left(e^{-|\vec{u}|} + e^{|\vec{u}|}\right)\operatorname{sen} a \\
&= \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{senh}|\vec{u}|\cos a + \cosh|\vec{u}|\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} q.
\end{aligned}
$$

Isto prova as identidades desejadas. Note também que

$$
q\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (a+\vec{u})\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{|\vec{u}|}(a\vec{u} + \vec{u}\vec{u}) = \frac{1}{|\vec{u}|}(\vec{u}a + \vec{u}\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}(a+\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}q,
$$

o que justifica a comutatividade de q com $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ na exponencial. Isto termina esta demonstração. □

Também **não** são válidas as fórmulas trigonométricas para soma de arcos. Como por exemplo, não é válido

$$
\operatorname{sen}(q+r) = \operatorname{sen} q \cos r + \operatorname{sen} r \cos q
$$

para todos $q, r \in \mathbb{H}$. De fato,

$$
\operatorname{sen}(i+j) = (i+j)\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\sqrt{2},
$$

e no entanto

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} i \cos j + \operatorname{sen} j \cos i &= (i \operatorname{senh} 1)(\cosh 1) + (j \operatorname{senh} 1)(\cosh 1) \\
&= (i+j)(\operatorname{senh} 1)(\cosh 1) = (i+j)\frac{1}{2}\operatorname{senh} 2.
\end{aligned}
$$

Também para o caso do cosseno podemos obter que

$$
\cos(i+j) = \cosh\sqrt{2} \neq \cosh^2 1 - k \operatorname{senh}^2 1 = \cos i \cos j - \operatorname{sen} i \operatorname{sen} j.
$$

7.3. As funções trigonométricas hiperbólicas. Todo o procedimento feito anteriormente para as funções trigonométricas pode ser repetido para as funções trigonométricas hiperbólicas. O procedimento é análogo e então não repetiremos aqui os detalhes, mas apenas apresentaremos as definições formais e as conclusões.

Levando em conta que para todo $x \in \mathbb{R}$, são válidas as igualdades

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \end{aligned}$$

e as séries dos membros da direita são convergentes qualquer que seja $x = q \in \mathbb{H}$, então definimos as funções seno e cosseno hiperbólicos de q por

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} q &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cosh q &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Após a substituição da expressão (8), a reorganização dos somatórios e o uso das igualdades $\vec{u}^{2n} = (-1)^n |\vec{u}|^{2n}$ e $\vec{u}^{2n+1} = (-1)^n |\vec{u}|^{2n} \vec{u}$, chegaremos às expressões da definição a seguir.

Definição 66. Dado qualquer $q \in \mathbb{H}$, o seno hiperbólico e o cosseno hiperbólico de q são os quatérnios denotados respectivamente por $\operatorname{senh} q$ e por $\cosh q$, ou $\operatorname{senh}(q)$ e $\cosh(q)$, dados por

$$\operatorname{senh} q = \operatorname{senh}(a) \cos |\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cosh(a) \operatorname{sen} |\vec{u}| \tag{17}$$

$$\cosh q = \cosh(a) \cos |\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \operatorname{senh}(a) \operatorname{sen} |\vec{u}|. \tag{18}$$

se $\vec{u} \neq \vec{0}$, e por $\operatorname{senh} q = \operatorname{senh} a$ e $\cosh q = \cosh a$ no caso em que $Im(q) = \vec{u} = \vec{0}$.

Assim como no caso das funções seno e cosseno, apresentamos algumas propriedades das funções trigonométricas hiperbólicas para o caso quatérnio.

Proposição 67. *Se $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, então são válidas as identidades*

i) $\cosh^2 q - \operatorname{senh}^2 q = 1$,

ii) $\operatorname{senh}(-q) = -\operatorname{senh} q$, *iii)* $\cosh(-q) = \cosh q$,

Demonstração. Seja $q = a + \vec{u}$ um quatérnio arbitrário. Se $\vec{u} = \vec{0}$ então nosso trabalho já estará feito pois estas identidades são válidas para argumentos reais. Vamos então provar os três itens para $\vec{u} \neq \vec{0}$, usando diretamente as expressões (17) e (18).

Para o item (i), lembrando que $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, temos

$$
\begin{aligned}
&\cosh^2 q - \operatorname{senh}^2 q \\
&\quad = \left(\cosh a \cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \operatorname{senh} a \operatorname{sen}|\vec{u}|\right)^2 - \left(\operatorname{senh} a \cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cosh a \operatorname{sen}|\vec{u}|\right)^2 \\
&\quad = \cosh^2 a \cos^2|\vec{u}| - \frac{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}{|\vec{u}|^2} \operatorname{senh}^2 a \operatorname{sen}^2|\vec{u}| + \frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|} \cosh a \cos|\vec{u}| \operatorname{senh} a \operatorname{sen}|\vec{u}| \\
&\qquad - \left(\operatorname{senh}^2 a \cos^2|\vec{u}| - \frac{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}{|\vec{u}|^2} \cosh^2 a \operatorname{sen}^2|\vec{u}| + \frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|} \operatorname{senh} a \cos|\vec{u}| \cosh a \operatorname{sen}|\vec{u}|\right) \\
&\quad = \cosh^2 a \cos^2|\vec{u}| - \operatorname{senh}^2 a \operatorname{sen}^2|\vec{u}| - \operatorname{senh}^2 a \cos^2|\vec{u}| + \cosh^2 a \operatorname{sen}^2|\vec{u}| \\
&\quad = (\cosh^2 a - \operatorname{senh}^2 a) \cos^2|\vec{u}| + (\cosh^2 a - \operatorname{senh}^2 a) \operatorname{sen}^2|\vec{u}| \\
&\quad = \cos^2|\vec{u}| + \operatorname{sen}^2|\vec{u}| = 1.
\end{aligned}
$$

Os itens (ii) e (iii) seguem imediatamente da validade das mesmas expressões para o caso real. De fato,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{senh}(-q) &= \operatorname{senh}(-a) \cos|-\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|-\vec{u}|} \cosh(-a) \operatorname{sen}|-\vec{u}| \\
&= -\operatorname{senh} a \cos|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cosh a \operatorname{sen}|\vec{u}| = -\operatorname{senh} q,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\cosh(-q) &= \cosh(-a) \cos|-\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|-\vec{u}|} \operatorname{senh}(-a) \operatorname{sen}|-\vec{u}| \\
&= \cosh a \cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \operatorname{senh} a \operatorname{sen}|\vec{u}| = \cos q.
\end{aligned}
$$

□

Proposição 68. *Se $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ então são válidas as identidades*

i) $\operatorname{senh}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \operatorname{sen}|\vec{u}|$, *desde que* $\vec{u} \neq \vec{0}$,

ii) $\cosh(\vec{u}) = \cos|\vec{u}|$.

Demonstração. Basta usar as expressões (17) e (18) com $a = 0$. □

Para números reais (ou complexos) são válidas as identidades exponenciais

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Podemos verificar que estas identidades exponenciais também são válidas no conjunto dos quatérnios, isto é,

$$\operatorname{senh} q = \frac{e^q - e^{-q}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh q = \frac{e^q + e^{-q}}{2}.$$

De fato, se $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, com $\vec{u} = \vec{0}$ então não há o que mostrar pois todas as funções recaem ao caso real onde as igualdades são verdadeiras. Agora se $q = a + \vec{u} \in \mathbb{H}$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$, então

$$\begin{aligned}
\frac{e^q - e^{-q}}{2} &= \frac{1}{2}e^q - \frac{1}{2}e^{-q} \\
&= \frac{e^a}{2}\left(\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right) - \frac{e^{-a}}{2}\left(\cos|\vec{u}| - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\operatorname{sen}|\vec{u}|\right) \\
&= \frac{e^a - e^{-a}}{2}\cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\frac{e^a + e^{-a}}{2}\operatorname{sen}|\vec{u}| \\
&= \operatorname{senh} a \cos|\vec{u}| + \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\cosh a \operatorname{sen}|\vec{u}| = \operatorname{senh} q,
\end{aligned}$$

e de forma análoga para o cosseno hiperbólico.

Em geral, não são válidas também as fórmulas de soma de arcos para a trigonometria hiperbólica, isto é, não são válidas as identidades

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(q+r) &= \operatorname{senh} q \cosh r + \operatorname{senh} r \cosh q \\
\cosh(q+r) &= \cosh q \cosh r + \operatorname{senh} r \operatorname{senh} q
\end{aligned}$$

para quaisquer que sejam $q, r \in \mathbb{H}$. Desta vez, deixamos para o leitor obter contra-exemplos.

8. Considerações finais

Este texto tem a intenção de ser apenas o ponto de início de muitos outros trabalhos. Uma vez conhecido o conjunto dos quatérnios, passamos a questionar: Podemos considerar funções $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$? Como definir limites ou continuidade destas funções? Qual seria o significado da expressão $\sqrt{q}$? É possível definir, $\ln q$, $\operatorname{sen}^{-1} q$ ou $\cos^{-1} q$? Quais seriam as expressões para estas funções? Podemos derivar estas funções? Será válido também que $(e^q)' = e^q$ e que $(\operatorname{sen} q)' = \cos q$? E quanto às aplicações da teoria dos quatérnios?

Algumas destas perguntas podem render muito tempo de estudo e muitas páginas de continhas.

Referências

1. Herstein, I. N. *Topics in Algebra*. Ginn and Company. Waltham, Massachusetts - Toronto - London, 1964. 47

2. Santos, M. A. dos *Dos números complexos aos quatérnions: Desenvolvimento algébrico, interpretação geométrica e aplicações.* 2013. 102 f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional - PROFMAT, Curitiba, 2013. 46

3. Poole, David. *Curso de álgebra linear*. 9^a edição. Tomson Learning. São Paulo, 2004. 53, 55