Solução da Prova Substitutiva de Números e Funções Reais

PROFMAT - 1^o ano - 11/07/2025

---

1. Dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que

i) $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$;

ii) $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

Solução: Para o item (i), vamos considerar dois casos.

Caso 1 ($a \leq b$): Neste caso $b = \max\{a, b\}$ e como $a - b \leq 0$ então também $|a - b| = -(a - b)$. Segue que

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - (a - b)) = b = \max\{a, b\}.$$

Caso 2 ($b \leq a$): Neste caso $a = \max\{a, b\}$ e como $0 \leq a - b$ então $|a - b| = a - b$. Segue que

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = a = \max\{a, b\}.$$

O item (ii) pode ser mostrado de forma análoga ao item (i), ou de forma mais simples levando em conta o resultado do item (i) e a igualdade $\min\{a, b\} = -\max\{-a, -b\}$. Assim sendo, temos diretamente que

$$\begin{aligned}\min\{a, b\} = -\max\{-a, -b\} &= -\frac{1}{2}(-a - b + |-a + b|) \\ &= -\frac{1}{2}(-a - b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).\end{aligned}$$

■

---

2. Dados quaisquer dois intervalos (fechados) da reta $[a, b]$ e $[m, n]$, mostre que existe uma bijeção $f : [a, b] \to [m, n]$.

Solução: Basta tomar a função que representa uma diagonal do retângulo de vértices (a, m), (a, n), (b, n) e (b, m). Consideremos a diagonal que liga os vértices (a, m) e (b, n), cuja função é dada por

$$\begin{aligned} rclf : [a, b] &\to [m, n] && (1) \\ x &\mapsto f(x) = \frac{n - m}{b - a}(x - a) + m = \frac{n - m}{b - a}x + \frac{mb - an}{b - a}. && (2)\end{aligned}$$

Por se tratar de uma função afim, com coeficiente $\frac{n-m}{b-a} \neq 0$ é claramente uma função injetora. De outra forma, dados $x, y \in [a, b]$ tais que $f(x) = f(y)$, temos que

$$\frac{n - m}{b - a}x + \frac{mb - an}{b - a} = \frac{n - m}{b - a}y + \frac{mb - an}{b - a},$$

donde segue que $x = y$, mostrando a injetividade de f.

Para a sobrejetividade, seja $y \in [m, n]$ arbitrário. Basta tomar $x = a + \frac{b-a}{n-m}(y - m)$ que temos $f(x) = y$. Além disso,

$$m \leq y \leq n,$$

donde

$$0 \leq y - m \leq n - m,$$

e

$$0 \leq (y - m)\frac{b - a}{n - m} \leq b - a,$$

e portanto

$$a \leq (y - m)\frac{b - a}{n - m} + a \leq b,$$

que prova que $x = (y - m)\frac{b-a}{n-m} + a \in [a, b]$ e satisfaz $f(x) = y$. Segue que f é sobrejetiva. ■

---

3. Determine o valor da fração continuada

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

Solução: Notemos que

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Segue que o número x deve satisfazer a igualdade $x^2 = x + 1$. Resolvendo esta equação quadrátiva obtemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Entretanto observamos que x é um número positivo e portanto temos que descartar a solução $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Segue que

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

■

---

4. Mostre que o polinômio $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$ não possui raízes racionais.

Solução: Sabemos que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é raiz de $P(x)$ se e somente se $p|1$ e $q|8$. Nestes termos temos obrigatoriamente que $p \in \{\pm 1\}$ e $q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$. Uma raiz racional de $P(x)$, caso exista, só pode ser um dos números ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$ ou $\pm\frac{1}{8}$. Testanto estes valores temos que

$$\begin{aligned}
P(-1) &= -8 + 6 - 1 = -3, \\
P(1) &= 8 - 6 - 1 = 1, \\
P(-\tfrac{1}{2}) &= -1 + 3 - 1 = 1, \\
P(\tfrac{1}{2}) &= 1 - 3 - 1 = -3, \\
P(-\tfrac{1}{4}) &= -\tfrac{1}{8} + \tfrac{3}{2} - 1 = \tfrac{3}{8}, \\
P(\tfrac{1}{4}) &= \tfrac{1}{8} - \tfrac{3}{2} - 1 = -\tfrac{19}{8}, \\
P(-\tfrac{1}{8}) &= -\tfrac{1}{64} + \tfrac{3}{4} - 1 = -\tfrac{17}{64}, \\
P(\tfrac{1}{8}) &= \tfrac{1}{64} - \tfrac{3}{4} - 1 = -\tfrac{111}{64}.
\end{aligned}$$

Como nenhum destes valores é raiz deste polinômio, este polinômio não possui raízes racionais. ∎

---

5. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função injetiva e monótona que satisfaz $f(x + y) = f(x)f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(1) > 0$. Mostre também que $f(m) = f(1)^m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Solução: Notemos primeiro que $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato, (procedendo por contradição) se existisse $a \in \mathbb{R}$ de forma que $f(a) = 0$ então teríamos

$$f(x) = f(x - a + a) = f(x - a)f(a) = f(x - a) \cdot 0 = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. A função seria portanto a função identicamente nula contrariando a hipótese de injetividade.

Agora notemos que $f(0) = f(0 + 0) = f(0)f(0) = (f(0))^2$. Segue que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$ e como não podemos ter $f(0) = 0$ segue que $f(0) = 1$. Além disso,

$$f(1) = f(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{1}{2})f(\tfrac{1}{2}) = \left(f(\tfrac{1}{2})\right)^2 > 0.$$

Agora vamos primeiro provar a igualdade desejada para $m \geq 0$ usando indução sobre m. Para $m = 0$, como $f(1) > 0$ temos que

$$f(0) = 1 = (f(1))^0.$$

Supondo agora a igualdade válida para $m > 0$, temos que

$$f(m + 1) = f(m)f(1) = (f(1))^m f(1) = (f(0))^{m+1}.$$

Segue por indução finita que $f(m) = (f(1))^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Resta provar a igualdade para os valores inteiros negativos. Suponha então $m > 0$. Assim

$$f(m)f(-m) = f(m-m) = f(0) = 1,$$

e como $f(m) \neq 0$,

$$f(-m) = \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{(f(1))^m} = (f(1))^{-m},$$

e a igualdade fica também válida para qualquer valor de m inteiro negativo. ■

---

6. Mostre que

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e use esta igualdade para obter todas as soluções da equação

$$\cos(3x) - \cos x = 0,$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

Solução: Primeiro temos que

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,$$

e

$$\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(x+x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x,$$

qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos x - \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen} x \\
&= (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\cos x - (2\operatorname{sen} x \cos x)\operatorname{sen} x \\
&= \cos^3 x - \operatorname{sen}^2 x \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x \\
&= \cos^3 x - 3\operatorname{sen}^2 x \cos x \\
&= \cos^3 x - 3(1-\cos^2 x)\cos x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x.
\end{aligned}$$

Agora, substituindo $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ na equação, obtemos

$$4\cos^3 x - 4\cos x = 0,$$

ou ainda

$$4\cos x(\cos^2 x - 1) = 0.$$

Logo temos as soluções

$$\cos x = 0, \qquad \cos^2 x = 1,$$

ou ainda,

$$\cos x = 0, \qquad \cos x = 1 \qquad \text{e} \qquad \cos x = -1,$$

que conduzem às 5 soluções

$$x = \frac{\pi}{2}, \qquad x = \frac{3\pi}{2}, \qquad x = 0, \qquad x = 2\pi \qquad \text{e} \qquad x = \pi,$$

no intervalo $[0, 2\pi]$. ■