

# Prova Substitutiva de Números e Funções Reais

PROFMAT - 1º ano - 11/07/2025

Nome: \_\_\_\_\_

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: \_\_\_\_\_

Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso  $\frac{100}{6} \approx 16,67$ .

---

1. Dados quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ , mostre que

i)  $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ ;

ii)  $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$ .

---

2. Dados quaisquer dois intervalos (fechados) da reta  $[a, b]$  e  $[m, n]$ , mostre que existe uma bijeção  $f : [a, b] \rightarrow [m, n]$ .

---

3. Determine o valor da fração continuada

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}$$

---

4. Mostre que o polinômio  $P(x) = 8x^3 - 6x - 1$  não possui raízes racionais.

---

5. Suponha que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função injetiva e monótona que satisfaz  $f(x + y) = f(x)f(y)$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Mostre que  $f(1) > 0$ . Mostre também que  $f(m) = f(1)^m$ , para todo  $m \in \mathbb{Z}$ .

---

6. Mostre que

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  e use esta igualdade para obter todas as soluções da equação

$$\cos(3x) - \cos x = 0,$$

no intervalo  $[0, 2\pi]$ .