

2ª Prova de Números e Funções Reais

PROFMAT - 1º ano - 04/07/2025

1. Determine a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ cujo gráfico passa pelos pontos $(-1, 5)$, $(1, -1)$ e $(2, -1)$.

Solução: A função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ deve satisfazer $f(-1) = 5$, $f(1) = -1$ e $f(2) = -1$. Segue que os coeficientes a , b e c devem satisfazer

$$\begin{cases} a - b + c = 5 \\ a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = -1. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos $a = 1$, $b = -3$ e $c = 1$, e portanto a função procurada é a função $f(x) = x^2 - 3x + 1$. ■

2. Apresente um polinômio com coeficientes racionais que possui o número $\alpha = \sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}$ como raiz.

Solução: Modo 1: (Manipulação algébrica do número α) Considerando $\alpha = \sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}$ temos que

$$\alpha^2 = -1 + \sqrt[3]{2},$$

ou ainda,

$$(\alpha^2 + 1) = \sqrt[3]{2}.$$

Nestes termos,

$$(\alpha^2 + 1)^3 = 2,$$

ou ainda,

$$\alpha^6 + 3\alpha^4 + 3\alpha^2 + 1 = 2.$$

Segue que o número α satisfaz a equação

$$\alpha^6 + 3\alpha^4 + 3\alpha^2 - 1 = 0,$$

e portanto α é raiz do polinômio (de coeficientes racionais)

$$P(x) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 1.$$

Modo 2: (Ajuste dos coeficientes do polinômio) Qualquer polinômio que tenha o fator $(x - \sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}})$ terá o número $\sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}$ como raiz. Porém o coeficiente $\sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}$ não é

racional. Para torná-lo racional, multipliquemos primeiro pelo seu conjugado. Temos então que

$$\left(x - \sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}\right) \left(x + \sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}\right) = x^2 - \left(\sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}\right)^2 = (x^2 + 1) - \sqrt[3]{2},$$

é um polinômio que possui $\sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}$ como raiz. Como ainda o coeficiente $\sqrt[3]{2}$ não é racional, continuamos a multiplicar o polinômio resultante pelo seu conjugado. Então

$$\begin{aligned} & \left(x - \sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}\right) \left(x + \sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}\right) \left[(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 1)\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right] \\ &= \left[(x^2 + 1) - \sqrt[3]{2}\right] \left[(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 1)\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right] \\ &= (x^2 + 1)^3 + (x^2 + 1)^2 \sqrt[3]{2} + (x^2 + 1) \sqrt[3]{4} - (x^2 + 1)^2 \sqrt[3]{2} - (x^2 + 1) \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{8} \\ &= (x^2 + 1)^3 - 2 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

é um polinômio que possui $\sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}$ como raiz. Como agora os coeficientes são todos racionais, temos que

$$P(x) = x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 1$$

é um polinômio com coeficientes racionais que possui $\sqrt{-1 + \sqrt[3]{2}}$ como raiz. ■

3. Use indução finita para provar que

$$\log_a x^n = n \log_a x,$$

para quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a, x \in (0, \infty)$ com $a \neq 1$.

Solução: Para $n = 0$ ou para $n = 1$ temos que

$$\log_a x^0 = \log_a 1 = 0 = 0 \cdot \log_a x,$$

ou

$$\log_a x^1 = \log_a x = 1 \cdot \log_a x.$$

Suponha agora (hipótese de indução) que $\log_a x^n = n \log_a x$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Então para $n + 1$ temos que

$$\begin{aligned} \log_a x^{n+1} &= \log_a x^n \cdot x \\ &= \log_a x^n + \log_a x \\ &= n \log_a x + \log_a x = (n + 1) \log_a x, \end{aligned}$$

como desejado. ■

4. Dado $b \in \mathbb{R}$ com $b > 1$ determine a solução da equação

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = b.$$

Solução: Dado $b \in \mathbb{R}$ com $b > 1$, suponha que

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = b,$$

ou equivalentemente

$$e^x + e^{-x} = 2b.$$

Multiplicando ambos os membros por e^x obtemos

$$(e^x)^2 + 1 = 2be^x,$$

ou equivalentemente

$$(e^x)^2 - 2be^x + 1 = 0.$$

Resolvendo esta equação quadrática no termo e^x obtemos

$$e^x = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4}}{2} = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2 - 1}}{2} = b \pm \sqrt{b^2 - 1}.$$

Como $b > 1$ então $b^2 > 1$ e $b^2 - 1 > 0$. Segue que temos duas soluções para a equação, que são

$$x = \ln(b \pm \sqrt{b^2 - 1}).$$

Adicionalmente note que

$$(b + \sqrt{b^2 - 1})(b - \sqrt{b^2 - 1}) = b^2 - (b^2 - 1) = 1,$$

donde

$$b + \sqrt{b^2 - 1} = \frac{1}{b - \sqrt{b^2 - 1}} = (b - \sqrt{b^2 - 1})^{-1}.$$

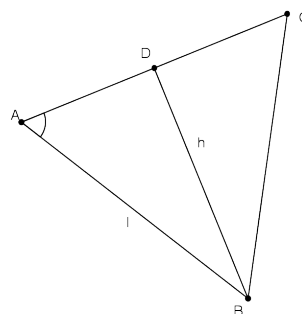
Logo

$$\ln(b + \sqrt{b^2 - 1}) = \ln(b - \sqrt{b^2 - 1})^{-1} = -\ln(b - \sqrt{b^2 - 1}),$$

e assim as duas soluções da equação são uma simétrica da outra. ■

5.

Considerando um triângulo equilátero de lado l (três ângulos internos de medidas iguais a $\frac{\pi}{3}$ radianos ou 60°). Considere a divisão deste triângulo equilátero em dois triângulos pela altura h relativa a um dos lados conforme a figura. Usando um destes triângulos retângulos mostre que $\cos(\frac{\pi}{6}) = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$.



Solução: Primeiro calculemos a altura h do triângulo retângulo. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{l^2}{4} + h^2,$$

donde

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4},$$

e portanto

$$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Separando agora o triângulo ADB retângulo em D , temos que o ângulo $\hat{B}$ é um ângulo de medida 30° ou $\frac{\pi}{6}$ radianos. Em relação a este ângulo $\hat{B}$ temos que a hipotenusa (hip.) mede l , o cateto adjacente (c.a.) mede $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ e o cateto oposto (c.o.) mede $\frac{l}{2}$. Desta forma,

$$\text{sen}(30^\circ) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\text{c.o.}}{\text{hip.}} = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{1}{2},$$

e

$$\text{cos}(30^\circ) = \text{cos}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\text{c.a.}}{\text{hip.}} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

■

6. Mostre que

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \text{e} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Da fórmula de soma de arcos do cosseno, temos que

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

e da identidade fundamental da trigonometria temos que

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Fazendo a diferença entre a segunda igualdade e a primeira, obtemos $1 - \cos(2x) = 2\sin^2 x$, donde

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

Por outro lado, somando as duas primeiras igualdades obtemos $1 + \cos(2x) = 2\cos^2 x$, donde

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

■