

1ª Prova de Números e Funções Reais

PROFMAT - 1º ano - 09/05/2025

1. Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função e $A \subset X$ um subconjunto arbitrário. Mostre que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Dê um contraexemplo para mostrar que em geral não vale a inclusão contrária $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Mostre que se f é injetora então vale a inclusão contrária.

Solução: Lembremos que, das definições de imagem inversa e de imagem direta de um conjunto, temos respectivamente

$$x \in f^{-1}(B) \quad \text{se e somente se} \quad f(x) \in B,$$

e

$$y \in f(A) \quad \text{se e somente se} \quad y = f(a) \quad \text{para algum} \quad a \in A.$$

Para mostrar que $A \subset f^{-1}(f(A))$, seja $x \in A$. Então $f(x) \in f(A)$ e portanto da definição de imagem inversa de um conjunto temos que $x \in f^{-1}(f(A))$.

Para um contraexemplo, tomemos a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, e consideremos o conjunto $A = [0, 1]$. Nestes termos $f(A) = [0, 1]$ e $f^{-1}(f(A)) = [-1, 1]$. Neste caso temos que $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$.

Suponha agora f injetora. Para provar que $f^{-1}(f(A)) \subset A$, suponha $x \in f^{-1}(f(A))$. Então da definição de imagem inversa, $f(x) \in f(A)$ e da definição de imagem direta $f(x) = f(a)$ para algum $a \in A$. Mas como f é injetora, temos que $x = a$, e como $a \in A$ segue que $x \in A$. ■

2. Sejam $a, b, c, d > 0$ números reais (positivos), tais que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Mostre que

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

Solução: Para a primeira desigualdade considerando $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} &\Rightarrow ad \leq bc \\ &\Rightarrow ab + ad \leq ab + bc \\ &\Rightarrow a(b+d) \leq b(a+c) \quad \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d}. \end{aligned}$$

De forma análoga para a segunda desigualdade, considerando $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} &\Rightarrow ad \leq bc \\ &\Rightarrow ad + cd \leq bc + cd \\ &\Rightarrow (a+c)d \leq c(b+d) \quad \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}. \end{aligned}$$

■

3. Se X e Y são dois conjuntos finitos, mostre que $X \cup Y$ é também um conjunto finito.

Solução: Se X for vazio, então $X \cup Y = Y$ e se Y for vazio, então $X \cup Y = X$. Em qualquer caso $X \cup Y$ é um conjunto finito.

Suponha agora que X e Y são ambos não vazios. Neste caso existem $m, n \in \mathbb{N}^*$ e bijeções $f : I_m \rightarrow X$ e $g : I_n \rightarrow Y$. Neste caso também podemos escrever $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$.

Vamos considerar primeiro o caso particular em que X e Y são disjuntos, isto é, $X \cap Y = \emptyset$. Neste caso basta considerar a função

$$\begin{aligned} \varphi : I_{m+n} &\rightarrow X \cup Y \\ k &\mapsto \varphi(k) = \begin{cases} f(k) = x_k & \text{se } 1 \leq k \leq m \\ g(k-m) = y_{k-m} & \text{se } m+1 \leq k \leq m+n \end{cases} \end{aligned}$$

Esta função é claramente sobrejetora. Também é injetora, já que não existem elementos simultaneamente em X e em Y .

Agora para o caso geral, isto é, o caso em que X e Y não são necessariamente disjuntos, notemos que $X \cup Y = (X - Y) \cup Y$. Como $(X - Y) \subset X$ então $(X - Y)$ é um conjunto finito. Além disso, $(X - Y)$ e Y são disjuntos. Do que provamos no caso particular, $(X - Y) \cup Y$ é um conjunto finito, e da igualdade $X \cup Y = (X - Y) \cup Y$ segue que $X \cup Y$ é um conjunto finito. ■

4. Use indução finita para mostrar que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

para todo $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Solução: Primeiro, para $n = 1$ temos claramente que

$$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Suponha agora a igualdade válida para $n \in \mathbb{N}^*$. Então para $(n+1)$ temos que

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Pelo princípio de indução finita, segue a validade da expressão para todo $n \in \mathbb{N}^*$. ■

5. Mostre que

$$\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}.$$

Solução: Notemos que

$$\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1} \quad \text{se e somente se} \quad \left(\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}\right)^4 = \frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}\right)^4 &= \frac{(\sqrt[4]{5}+1)^4}{(\sqrt[4]{5}-1)^4} \\ &= \frac{(\sqrt[4]{5}+1)^2(\sqrt[4]{5}+1)^2}{(\sqrt[4]{5}-1)^2(\sqrt[4]{5}-1)^2} \\ &= \frac{(\sqrt{5}+2\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt{5}+2\sqrt[4]{5}+1)}{(\sqrt{5}-2\sqrt[4]{5}+1)(\sqrt{5}-2\sqrt[4]{5}+1)} \\ &= \frac{5+2\sqrt[4]{5}\sqrt{5}+\sqrt{5}+2\sqrt[4]{5}\sqrt{5}+4\sqrt{5}+2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}+2\sqrt[4]{5}+1}{5-2\sqrt[4]{5}\sqrt{5}+\sqrt{5}-2\sqrt[4]{5}\sqrt{5}+4\sqrt{5}-2\sqrt[4]{5}+\sqrt{5}-2\sqrt[4]{5}+1} \\ &= \frac{6+4\sqrt{5}\sqrt[4]{5}+6\sqrt{5}+4\sqrt[4]{5}}{6-4\sqrt{5}\sqrt[4]{5}+6\sqrt{5}-4\sqrt[4]{5}} \\ &= \frac{3(2+2\sqrt{5})+2(2\sqrt{5}+2)\sqrt[4]{5}}{3(2+2\sqrt{5})-2(2\sqrt{5}+2)\sqrt[4]{5}} \\ &= \frac{(2+2\sqrt{5})(3+2\sqrt[4]{5})}{(2+2\sqrt{5})(3-2\sqrt[4]{5})} \\ &= \frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}. \end{aligned}$$

Segue que $\left(\frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}\right)^4 = \frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}$, e portanto $\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$. ■

6. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, mostre que a função afim

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

é bijetora. Determine a expressão para a inversa f^{-1} .

Solução: Para mostrar que f é injetora, sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $f(x) = f(y)$. Então

$$ax + b = ay + b,$$

donde

$$ax = ay,$$

e como $a \neq 0$ segue que $x = y$ provando a injetividade. Para a sobrejetividade de f , seja $y \in Cd(f) = \mathbb{R}$ arbitrário. Basta tomar $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R} = D(f)$ que temos

$$f(x) = ax + b = a \left(\frac{y-b}{a} \right) + b = (y-b) + b = y,$$

provando a sobrejetividade de f .

Para obter a expressão para a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, temos que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x)$ deve satisfazer

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x,$$

donde,

$$af^{-1}(x) + b = x,$$

e portanto

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

■