

1ª Prova de Números e Funções Reais

PROFMAT - 1º ano - 09/05/2025

Nome: _____

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: _____

Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

1. Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função e $A \subset X$ um subconjunto arbitrário. Mostre que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Dê um contraexemplo para mostrar que em geral não vale a inclusão contrária $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Mostre que se f é injetora então vale a inclusão contrária.

2. Sejam $a, b, c, d > 0$ números reais (positivos), tais que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Mostre que

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

3. Se X e Y são dois conjuntos finitos, mostre que $X \cup Y$ é também um conjunto finito.

4. Use indução finita para mostrar que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

para todo $n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

5. Mostre que

$$\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}.$$

6. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, mostre que a função afim

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax + b \end{aligned}$$

é bijetora. Determine a expressão para a inversa f^{-1} .