2^a Prova de Fundamentos de Cálculo

PROFMAT - 2° ano - 04/07/2024

---

1. Dada a função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$, use a definição de derivada para mostrar que f é derivável em $(0, \infty)$ e determine a derivada $f'(x)$.

Solução: Vamos mostrar que existe o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} = \sqrt[3]{x}}{h},$$

qualquer que seja $x \in (0, \infty)$. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h \cdot (\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h \cdot (\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2})} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}}.
\end{aligned}$$

Agora, como

$$\lim_{h \to 0} \sqrt[3]{(x+h)^2} = \lim_{h \to 0} \sqrt[3]{(x+h)x} = \lim_{h \to 0} \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^2},$$

então

$$\lim_{h \to 0} \sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2} = 3\sqrt[3]{x^2} \neq 0,$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Portanto f é derivável e $f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. ■

---

2. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções deriváveis, mostre que (fg) é derivável também e além disso,

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

para todo $x \in [a, b]$.

Solução: 1^a **Solução (Usando o limite quando $h \to 0$)** Para mostrar que (fg) é derivável, temos que provar que existe o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h},$$

qualquer que seja $x \in [a,b]$.

Dado então $x \in [a,b]$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.
\end{aligned}$$

Agora, como f é derivável em $x \in [a,b]$, então existe o limite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ e este limite é $f'(x)$. Como g é derivável, então existe o limite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ e este limite é $g'(x)$. Como g é derivável em $x \in [a,b]$ então g é contínua em x e então $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$. segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\lim_{h\to 0} g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Segue que (fg) é derivável em $x \in [a,b]$ e além disso, $(fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

2^a **Solução (Usando o limite quando $w \to x$)** Para mostrar que (fg) é derivável em qualquer $x \in [a,b]$, temos que provar que existe o limite

$$\lim_{w\to x}\frac{(fg)(w)-(fg)(x)}{w-x},$$

qualquer que seja $x \in [a,b]$.

Dado então $x \in [a,b]$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to x}\frac{(fg)(w)-(fg)(x)}{w-x} &= \lim_{w\to x}\frac{f(w)g(w)-f(x)g(x)}{w-x}\\
&= \lim_{w\to x}\frac{f(w)g(w)-f(x)g(w)+f(x)g(w)-f(x)g(x)}{w-x}\\
&= \lim_{w\to x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}g(w)+f(x)\frac{g(w)-g(x)}{w-x}.
\end{aligned}$$

Agora, como f é derivável em $x \in [a,b]$, então existe o limite $\lim\limits_{w\to x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}$ e este limite é $f'(x)$. Como g é derivável, então existe o limite $\lim\limits_{w\to x}\frac{g(w)-g(x)}{w-x}$ e este limite é $g'(x)$. Como g é derivável em $x \in [a,b]$ então g é contínua em x e então $\lim\limits_{w\to x} g(w) = g(x)$. segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{w\to x}\frac{(fg)(w)-(fg)(x)}{w-x} &= \lim_{w\to x}\frac{f(w)-f(x)}{w-x}g(w)+f(x)\frac{g(w)-g(x)}{w-x}\\
&= \lim_{w\to x}\left[\frac{f(w)-f(x)}{w-x}\right]\lim_{h\to 0} g(w)+f(x)\lim_{w\to x}\left[\frac{g(w)-g(x)}{w-x}\right]\\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Segue que (fg) é derivável em $x \in [a,b]$ e além disso, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

$\blacksquare$

---

3. Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $[a,b]$ com $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$ e deriváveis em (a,b). Mostre que existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = g'(c)$.

Solução: Tomemos a função φ, definida por $\varphi(x) = g(x) - f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. A função φ é portanto contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Além disso,

$$\begin{aligned}
\varphi(b) &= g(b) - f(b) \\
&= g(b) - g(a) + g(a) - f(b) + f(a) - f(a) \\
&= [g(b) - g(a)] - [f(b) - f(a)] + g(a) - f(a) \\
&= g(a) - f(a) = \varphi(a).
\end{aligned}$$

Segue do Teorema de Rolle que existe $c \in (a,b)$ de forma que $\varphi'(c) = 0$. Como $\varphi'(c) = g'(c) - f'(c)$, temos que $g'(c) - f'(c) = \varphi'(c) = 0$ e portanto $g'(c) = f'(c)$. $\blacksquare$

---

4. Use a definição de integral para calcular $\displaystyle\int_0^1 2 - x - x^2 dx$.

Solução: Usaremos a definição de integral

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}),$$

com $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e $P = \{0 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = 1\}$.

Vamos considerar a partição P do intervalo $[0,1]$ obtida dividindo o intervalo em n partes iguais. Desta forma, cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ tem comprimento fixo $(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n}$ e também $x_i = i \cdot \frac{1}{n} = \frac{i}{n}$. Escolhemos $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ como sendo $c_i = x_i$ para cada $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$. Resta ver que $||P|| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) &= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [2 - x_i - (x_i)^2] \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[2 - \frac{i}{n} - \frac{i^2}{n^2} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^2}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[2n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[2n - \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\
&= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{12-3-2}{6} = \frac{7}{6}.
\end{aligned}
$$

■

---

5. A Função Beta é a função a dois parâmetros reais que a cada $u, v \in (0, \infty)$, associa o número real

$$B(u,v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx.$$

Mostre que $B(u,v) = B(v,u)$.

Solução: Comecemos com a igualdade

$$B(u,v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx$$

e fazemos a mudança de variáveis $y = 1 - x$. Nestes termos $x = 1 - y$ e $\frac{dy}{dx} = -1$. Além disso, quando $x = 0$ temos $y = 1$ e quando $x = 1$ temos $y = 0$.

Segue que

$$
\begin{aligned}
B(u,v) &= \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx \\
&= -\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}(-1)dx \\
&= -\int_1^0 (1-y)^{u-1}y^{v-1}\frac{dy}{dx}dx \\
&= -\int_1^0 (1-y)^{u-1}y^{v-1}dy \\
&= \int_0^1 y^{v-1}(1-y)^{u-1}dy = B(v,u).
\end{aligned}
$$

■

---

6. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e com derivada contínua em $[a,b]$. Mostre que

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = \frac{[f(b)]^2 - [f(a)]^2}{2}.$$

Solução: 1^a **Solução (Usando integração por partes):** Usando a regra da integração por partes, temos que

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = f(x)f(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)f(x)dx.$$

Como as integrais do primeiro membro e do segundo membro são iguais, trazemos a integral do segundo membro para o primeiro membro e obtemos

$$2\int_a^b f(x)f'(x)dx = f(b)f(b) - f(a)f(a),$$

e portanto

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = \frac{[f(b)]^2 - [f(a)]^2}{2}.$$

2^a **Solução (Usando integração por substituição):** Substituindo na integral $u = f(x)$ temos que $\frac{du}{dx} = f'(x)$. Além disso quando $x = a$ temos $u = f(a)$ e quando $x = b$ temos $u = f(b)$. Desta forma,

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} u\frac{du}{dx}dx = \int_{f(a)}^{f(b)} udu = \left.\frac{u^2}{2}\right|_{f(a)}^{f(b)} = \frac{[f(b)]^2 - [f(a)]^2}{2}.$$

3^a **Solução (Usando o T.F.C):** Neste caso, basta ver que $F(x) = \frac{1}{2}[f(x)]^2$ é uma primitiva de $f(x)f'(x)$ em todo o intervalo $[a, b]$. De fato, para qualquer $x \in [a, b]$ temos que $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}[f(x)]^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left([f(x)]^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 2f(x)f'(x) = f(x)f'(x)$. Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = F(b) - F(a) = \frac{1}{2}[f(b)]^2 - \frac{1}{2}[f(a)]^2 = \frac{[f(b)]^2 - [f(a)]^2}{2}.$$

$\blacksquare$