

2ª Prova de Fundamentos de Cálculo

PROFMAT - 2º ano - 04/07/2024

Nome: _____

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: _____

Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

1. Dada a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$, use a definição de derivada para mostrar que f é derivável em $(0, \infty)$ e determine a derivada $f'(x)$.

2. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis, mostre que (fg) é derivável também e além disso,

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

para todo $x \in [a, b]$.

3. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $[a, b]$ com $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$ e deriváveis em (a, b) . Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = g'(c)$.

4. Use a definição de integral para calcular $\int_0^1 2 - x - x^2 dx$.

5. A Função Beta é a função a dois parâmetros reais que a cada $u, v \in (0, \infty)$, associa o número real

$$B(u, v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1} dx.$$

Mostre que $B(u, v) = B(v, u)$.

6. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e com derivada contínua em $[a, b]$. Mostre que

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = \frac{[f(b)]^2 - [f(a)]^2}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$