Solução da 1^a Prova de Fundamentos de Cáclulo

PROFMAT - 2^o ano - 17/05/2024

---

1. Sejam $a, b, c, d > 0$ números reais (positivos), tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Mostre que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

Solução: Supondo que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, temos que $ad < bc$ pois b e d são positivos.

Da desigualdade $ad < bc$, somando ab em ambos os membros, obtemos $ab+ad < ab+bc$, donde $a(b+d) < b(a+c)$ e dividindo ambos os membros por b e $b+d$ que são números positivos, obtemos $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$.

Também da desigualdade $ad < bc$, somando cd em ambos os membros, obtemos $cd + ad < bc+cd$, donde $d(a+c) < c(b+d)$ e dividindo ambos os membros por d e $b+d$ que são números positivos, obtemos $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Segue que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$ como desejado. $\blacksquare$

---

2. Considere a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{1\} &\to \mathbb{R} - \{1\} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

Mostre que f é bijetora e obtenha a expressão para a inversa f^{-1}.

Solução: **Modo 1: (Usando as definições de injetividade e de sobrejetividade)** Para mostrar que f é injetiva, suponha $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$ de forma que $f(x) = f(y)$. Então

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1},$$

e como $x - 1 \neq 0$ e $y - 1 \neq 0$, obtemos

$$(x+1)(y-1) = (y+1)(x-1),$$

e portanto

$$xy + y - x - 1 = yx + x - y - 1.$$

Segue que $y - x = x - y = -(y - x)$, e esta igualdade só pode ser verdadeira se ambos os membros forem nulos. Assim, $y - x = 0$, e portanto $x = y$ mostrando que f injetora.

Para mostrar que f é sobrejetora, seja $y \in \mathbb{R} - \{1\}$ arbitrário. Queremos mostrar que existe $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ de forma que $f(x) = y$ ou ainda $\frac{x+1}{x-1} = y$. Usaremos esta igualdade desejada para obter este x. Desta forma, queremos encontrar x de forma que

$$x + 1 = y(x-1) = xy - y,$$

au ainda,

$$x - xy = -y - 1.$$

Segue que $(1-y)x = -y-1$ e como $y \neq 1$, dividindo tudo por $(1-y) \neq 0$, obtemos

$$x = \frac{-y-1}{1-y} = \frac{y+1}{y-1}.$$

Como $y \neq 1$, então um tal x existe e além disso, $x \neq 1$ pois o numerador da fração jamais se iguala ao denominador. Segue que a cada $y \in \mathbb{R} - \{1\}$, existe $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ dado por $x = \dfrac{y+1}{y-1}$, de forma que $f(x) = y$. Portanto f é também sobrejetora.

O processo que usamos para provar que f é sobrejetora, já obtém a expressão para a inversa, pois $y = f(x)$ se e somente se $x = f^{-1}(y)$. Segue que $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$ ou ainda sendo irrelevante a identificação da variável, podemos escrever

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

Modo 2: (Usando resultados conhecidos) Vamos mostrar que $(f \circ f)(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. De fato, dado $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ arbitrário, temos que

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) = f(f(x)) &= \frac{f(x)+1}{f(x)-1} \\ &= \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} \\ &= \frac{\frac{(x+1)+(x-1)}{x-1}}{\frac{(x+1)-(x-1)}{x-1}} \\ &= \frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = \frac{2x}{2} = x. \end{aligned}$$

Segue que $(f \circ f)(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, e assim, f admite uma inversa pela esquerda, sendo f a inversa à esquerda, e uma inversa pela direita sendo f também a inversa à direita. Segue que f é bijetora e além disso a inversa f^{-1} é exatamente a inversa pela esquerda (que coincide com a inversa pela direita), isto é, $f^{-1}(x) = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. ■

---

3. Decida se converge ou se diverge a sequência (x_n) definida por $x_n = \frac{n!}{n^n}$.

Solução: Modo 1: (Usando o Teorema do Confronto) Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^n} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{4}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Então segue que $0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite quando $n \to \infty$, como $\lim 0 = \lim \frac{1}{n} = 0$, segue do Teorema do Confronto que $\lim \frac{n!}{n^n}$ existe e é igual a 0.

Modo 2: (Usando a definição de limite) Neste caso, iremos provar que a sequência converge. Mas para usar a definição de limite de sequência, precisamos do candidato a limite. Provaremos então que $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ e para isto, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ e desta forma $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Então, para todo $n > n_0$ usando a desigualdade $\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$ válida para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\left|\frac{n!}{n^n} - 0\right| = \left|\frac{n!}{n^n}\right| = \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Isto prova que o limite existe e além disso é igual a 0. ■

---

4. Seja $g : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ com $M \neq 0$, mostre que existem $C > 0$ e $\delta > 0$ de forma que $|g(x)| > C$ para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$.

Solução: Suponha $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ com $M \neq 0$. Para o número $\varepsilon = \frac{|M|}{2} > 0$, como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, segue da definição de limite que existe $\delta > 0$ de forma que

$$|g(x) - M| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Desta forma, para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$, temos que

$$||g(x)| - |M|| \leq |g(x) - M| < \varepsilon = \frac{|M|}{2}.$$

Segue que para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$,

$$-\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| < \frac{|M|}{2},$$

donde

$$\frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{3|M|}{2},$$

e o resultado fica cumprido com $C = \frac{|M|}{2} > 0$. ■

---

5. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se g é limitada e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, então mostre que $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Solução: **Modo 1: (Usando o Teorema do Confronto)** Como g é limitada, existe $C > 0$ de forma que $|g(x)| < C$ para todo $x \in X$, ou ainda equivalentemente,

$$-C < g(x) < C \qquad \text{para todo} \qquad x \in X.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por $f(x)$ temos que

$$-Cf(x) \leq f(x)g(x) \leq Cf(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \in X \qquad \text{se} \qquad f(x) \geq 0.$$

ou

$$-Cf(x) > f(x)g(x) > Cf(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \in X \qquad \text{se} \qquad f(x) < 0.$$

Em qualquer caso, como $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to a} Cf(x) = 0$ e também $\lim_{x\to a} -Cf(x) = 0$. Segue do Teorema do Confronto que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Modo 2: (Usando a definição de limite) Para provar que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Como g é limitada, existe $C > 0$ de forma que $|g(x)| < C$ para todo $x \in X$. Também, como $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, para o número $\frac{\varepsilon}{|C|} > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{|C|} \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Nestes termos, para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta) \subset X$, temos

$$|f(x)g(x) - 0| = |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{|C|}|C| = \varepsilon.$$

Segue da definição de limite de funções que de fato $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. ■

---

6. Considere o Critério das Sequências para o limite de funções:

> Existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$, se e somente se, para toda sequência (x_n) com $x_n \in (X - \{a\})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$, existe o limite $\lim f(x_n)$.

Estabeleça a **negação** deste critério e use esta negação para mostrar que não existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ para a função

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \end{array}$$

qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

Solução: O limite $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe, se e somente se, existir uma sequência (x_n) com $x_n \in (X - \{a\})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$, de forma que não existe o limite $\lim_{x\to a} f(x_n)$.

Vamos usar agora este princípio para mostrar que não existe o limite da função f dada, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. Para isso, vamos construir uma sequência (x_n) com $x_n \in (X - \{a\})$, $\lim x_n = a$ e no entanto $\lim f(x_n)$ não existe.

Seja $a \in \mathbb{R}$ arbitrário. Para cada $n \in \mathbb{N}$, com $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, o intervalo $(a, a+\varepsilon) = (a, a+\frac{1}{n})$ possui obrigatoriamente pelo menos um número racional e pelo menos um número irracional. Se n é par, escolhemos $x_n \in (a, a+\frac{1}{n})$ de forma que x_n é racional. Se n é ímpar, escolhemos $x_n \in (a, a+\frac{1}{n})$ de forma que x_n é irracional.

Nestes termos, $f(x_{2n}) = 1$ e $f(x_{2n+1}) = -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e desta forma a sequência $f(x_n)$ não converge.

Construímos portanto uma sequência (x_n) de pontos de $(X - \{a\})$ satisfazendo $\lim x_n = a$ e no entanto não existe $\lim f(x_n)$. Segue do Critério das Sequências para o limite de funções que não existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. ■