

1ª Prova de Fundamentos de Cálculo

PROFMAT - 2º ano - 17/05/2024

Nome: _____

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: _____

Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

1. Sejam $a, b, c, d > 0$ números reais (positivos), tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Mostre que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

2. Considere a função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} - \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} - \{1\} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

Mostre que f é bijetora e obtenha a expressão para a inversa f^{-1} .

3. Decida se converge ou se diverge a sequência (x_n) definida por $x_n = \frac{n!}{n^n}$.

4. Seja $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ com $M \neq 0$, mostre que existem $C > 0$ e $\delta > 0$ de forma que $|g(x)| > C$ para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$.

5. Sejam $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se g é limitada e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, então mostre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

6. Considere o Critério das Sequências para o limite de funções:

Existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, se e somente se, para toda sequência (x_n) com $x_n \in (X - \{a\})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$, existe o limite $\lim f(x_n)$.

Estabeleça a **negação** deste critério e use esta negação para mostrar que não existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ para a função

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \end{aligned}$$

qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.