8^a Lista de exercícios de Fundamentos de Cálculo

1. Se $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, mostre que

$$\int_0^b f(x)dx = \int_0^b f(b-x)dx.$$

2. Use o exercício anterior para mostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^n x + \operatorname{sen}^n x} dx = \frac{\pi}{4},$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

3. Se a e b são números reais com $0 < a < b$, determine o valor de

$$\lim_{t \to 0} \left[\int_0^1 (bx + a(1-x))^t dx \right]^{\frac{1}{t}}.$$

4. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável com f' contínua em $[a, b]$, mostre que

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2} \left[(f(b))^2 - (f(a))^2 \right].$$

5. Se $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, mostre que

$$\int_0^b f(t)(b-t)dt = \int_0^b \left(\int_0^t f(u)du \right) dt.$$

6. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função, a notação

$$\int f(t)dt,$$

chamada de integral indefinida de f, é apenas uma notação (caso exista) para uma primitiva de f em $[a, b]$. Determine

$$\int 2 \operatorname{sen} t \cos t dt,$$

usando três métodos: fazendo a mudança de variável $u = \operatorname{sen} t$; fazendo a mudança de variável $u = \cos t$; usando a identidade trigonométrica $2 \operatorname{sen} t \cos t = \operatorname{sen}(2t)$. Explique a diferença encontrada nas três técnicas.