7^a Lista de exercícios de Fundamentos de Cálculo

1. Em cada caso, é dada uma função f e um intervalo $[a,b]$. Calcule $\int_a^b f(x)dx$ usando o limite das somas de Riemann.

a) $f(x) = 4 - 2x$ em $[a,b] = [0,2]$,

b) $f(x) = 5 - 3x$ em $[a,b] = [0, \frac{5}{3}]$,

c) $f(x) = 1 - x^2$ em $[a,b] = [-1,1]$,

d) $f(x) = x^3 + x$ em $[a,b] = [-2,1]$,

e) $f(x) = 3 - |x|$ em $[a,b] = [-3,3]$,

f) $f(x) = \ln(x-1)$ em $[a,b] = [1,2]$.

2. Mostre que se f é uma função ímpar então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$$

desde que a integral exista.

3. Se f e g são funções contínuas em $[a,b]$ com $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então mostre que

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

4. Se f é uma função contínua em $[a,b]$ então mostre que

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

5. A fração $\frac{22}{7}$ é uma das mais famosas aproximações para π. Alguns povos usaram por muito tempo que $\pi = \frac{22}{7}$. Mostre que $\pi < \frac{22}{7}$, mais precisamente, mostre que

$$0 < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = \frac{22}{7} - \pi.$$

6. Nosso objetivo agora é mostrar que a área de um círculo de raio r é $A = \pi r^2$, usando integrais. A ideia é então provar que

$$A = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx = \pi r^2.$$

Isto entretanto não é uma tarefa simples já que não é simples determinar uma antiderivada para a função $\sqrt{r^2 - x^2}$.

a) Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x dx$ e $\int \cos^2 x dx$,

b) Mostre que $\int \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{r^2}{2} \operatorname{sen}^{-1}(\frac{x}{r}) + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + C$, para $x \in [-r, r]$
(**Sugestão**: Faça a mudança de variáveis $x = r \operatorname{sen} u$),

c) Calcule agora a área do círculo de raio r usando uma integral definida.

7. Sejam f e g funções contínuas em $[0, b]$. Mostre que a função

$$y(x) = x_0 e^{-\int_0^x f(u)du} + e^{-\int_0^x f(u)du} \int_0^x g(t) e^{\int_0^t f(u)du} dt$$

é solução do problema

$$\begin{cases} y' + f(x)y = g(x) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

para qualquer $x \in [0, b]$.

8. Se $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ e $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ são integráveis, então

$$\int_0^2 (x-1) f((x-1)^2) dx = 0 = \int_0^\pi g(\operatorname{sen} x) \cos x dx.$$

9. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, e $m = \frac{a+b}{2}$, então prove que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) + (x - m) f'(x) dx.$$

10. (**Generalização do Teorema Fundamental do Cálculo**). Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta : I \to [a, b]$ deriváveis. Defina $F : I \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt$$

para todo $x \in I$. Mostre que F é derivável em I e além disso

$$F'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

Mostre ainda que o Teorema Fundamental do Cálculo é um caso particular deste resultado.