6^a Lista de exercícios de Fundamentos de Cálculo

1. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $a \in X \cap X'$. Usando obrigatoriamente o limite quando $h \to 0$, mostre que também são deriváveis em a as funções $(f+g)$, (cf) qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$, (fg) e $(\frac{f}{g})$ desde que $g(a) \neq 0$. Além disso,

i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

ii) $(cf)'(a) = cf'(a)$;

iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

iv) $(\frac{f}{g})'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$.

2. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $f(X) \subset Y$. Se f é derivável em $a \in X \cap X'$ e g é derivável em $f(a) \in Y \cap Y'$, usando o limite quando $h \to 0$, mostre que $(g \circ f)$ é também derivável em a. Além disso $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

3. Seja $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ uma função que admite inversa $f^{-1} : Y \to X \subset \mathbb{R}$. Se f é derivável em $a \in X \cap X'$ com $f'(a) \neq 0$ e f^{-1} é contínua em $f(a)$, usando obrigatoriamente o limite quando $h \to 0$, mostre que f^{-1} é derivável em $f(a)$ e além disso, $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

4. Sejam $f, g, \varphi : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Se em um ponto $a \in X \cap X'$ tem-se que $f(a) = g(a)$ e existem $f'(a) = g'(a)$ então φ é derivável em a e além disso, $\varphi'(a) = f'(a) = g'(a)$.

5. Seja $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ um ponto de máximo local para a função $f : X \to \mathbb{R}$. Mostre que se f possui derivada à direita em a então $f'_+(a) \leq 0$. Mostre que se f possui derivada à esquerda em a então $f'_-(a) \geq 0$.

6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se f é derivável no ponto a então

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Entretanto, a existência do limite acima não garante sequer que f seja contínua em a. Também não garante que f seja derivável em a, mesmo quando f for contínua em a (dê contra-exemplos).

7. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $a \in X \cap X'$, defina $g : X \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{se} \quad x \neq a \\ L & \text{se} \quad x = a. \end{cases}$$

Mostre que g é contínua se, e somente se, existe $f'(a)$ e $f'(a) = L$.

8. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em um intervalo I. Mostre que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f.

9. (Teorema do Valor Intermediário de Cauchy) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis no intervalo (a, b). Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c).$$

Sugestão: Use o Teorema de Rolle na função $\varphi(x) = (g(b) - g(a))\, f(x) - (f(b) - f(a))\, g(x)$.

10. Seja f uma função ímpar e derivável em toda a reta real. Mostre que para qualquer $b \in \mathbb{R}$ existe um número $c \in (-b, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)}{b}$.

11. Sejam $h > 0$ arbitrário e $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em $(a, a+h)$. Mostre que existe $t \in (0, 1)$ de forma que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+th) \cdot h.$$

12. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em um intervalo I. Mostre que f satisfaz a condição de Lipschitz $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ para quaisquer $x, y \in I$ (e k uma constante positiva), se e somente se, $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$.

13. Seja f uma função contínua em $I = [a, b]$ e derivável em todo $x \in (a, b)$ e suponha que existe $k \in (0, 1)$ de forma que $|f'(x)| \leq k$ para qualquer $x \in (a, b)$. Mostre que a função φ definida em I por $\varphi(x) = x + kf(x)$ é injetora.
Sugestão: Use o exercício anterior.

14. Seja I um intervalo qualquer (aberto, fechado, limitado ou ilimitado). Suponha $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I e derivável em I exceto possivelmente nos extremos limitados de I. Se $f'(x) = 0$ para todo x no interior de I, mostre que f é uma função constante.

15. Se f e g são funções definidas em toda a reta real, que satisfazem

$$g(x) = xf(x) + 1, \qquad g(x+y) = g(x)g(y) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 1,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, então mostre que g é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e além disso, $g'(x) = g(x)$.

16. Seja f uma função definida em um intervalo $I = (a, b)$. Mostre que f é derivável em um ponto $c \in I$, se e somente se, existe uma função φ, contínua em c, tal que

$$f(x) = f(c) + \varphi(x)(x - c),$$

para todo $x \in I$.

17. (Versão simplificada da regra de L'Hospital) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções deriváveis com derivadas contínuas em $c \in (a, b)$. Se $f(c) = g(c) = 0$ com $g'(c) \neq 0$ então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

18. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I. Se existe $\alpha > 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ para quaisquer $x, y \in I$, então f é derivável e possui derivada nula em todos os pontos $c \in I$.

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $\mathbb{R}$. Suponha que f satisfaz $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todos $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(x) = f'(0)x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

20. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I, e duas vezes derivável em um ponto $a \in int(I)$. Mostre que

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a)}{h^2},$$

e também

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2}.$$

21. Uma função f é dita convexa em um intervalo $I = [a, b]$ se para quaisquer $t \in [0, 1]$ e $x, y \in I$,

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$

Seja f uma função definida em $I = [a, b]$ e derivável em (a, b). Mostre que se f é convexa então $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$ para quaisquer $x, y \in (a, b)$.

22. Seja f uma função contínua e derivável em $I = [a, b]$, de forma que $f''(x)$ existe em todo $x \in (a, b)$. Mostre que f é convexa em $[a, b]$, se e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.