5^a Lista de exercícios de Fundamentos de Cálculo

1. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $a \in X$. Mostre que f é limitada em uma vizinhança de a, isto é, existem $C > 0$ e $\delta > 0$ de forma que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.

2. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $a \in X$. Mostre que também são contínuas em a as funções, $(f + g)$, (cf) para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$, (fg) e $(\frac{f}{g})$ desde que $g(a) \neq 0$.

3. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $a \in X$. Mostre que $|f|$ é também contínua em a.

4. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funções com $f(X) \subset Y$. Se f é contínua em $a \in X$ e g é contínua em $f(a) \in Y$, então mostre que $(g \circ f) : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a.

5. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $a \in X$, e seja (x_n) uma sequência arbitrária com $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$. Mostre que $\lim f(x_n) = f(a)$.

6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $a \in X$. Mostre que se $f(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ de forma que $f(x) > 0$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.

7. **(Função Lipschitz contínua)** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e suponha que existe $k \in \mathbb{R}$ com $k > 0$ de forma que $|f(x) - f(y)| < k|x - y|$ para quaisquer $x, y \in X$. Mostre que f é contínua em qualquer $a \in X$.

8. **(Função Hölder contínua)** Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e suponha que existem $k, \gamma \in \mathbb{R}$ com $k > 0$ e $\gamma > 0$ de forma que $|f(x) - f(y)| < k|x - y|^\gamma$ para quaisquer $x, y \in X$. Mostre que f é contínua em qualquer $a \in X$.

9. Mostre que o ponto $x = 0$ é um ponto de descontinuidade da função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ L \quad \text{se} & x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

qualquer que seja $L \in \mathbb{R}$.

10. **(Teorema do Ponto Fixo de Brower para dimensão 1)** Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in [a, b]$ de forma que $f(c) = c$ (f possui um ponto fixo).

11. Dadas $f, g : X \to \mathbb{R}$, defina as funções $f \vee g : X \to \mathbb{R}$ e $f \wedge g : X \to \mathbb{R}$ para cada $x \in X$, por

$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Mostre que se f e g são contínuas em um ponto $a \in X$ então $(f \vee g)$ e $(f \wedge g)$ também são contínuas em a.
Sugestão: Mostre primeiro (e depois use) as propriedades:

i) $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$;

ii) $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$;

iii) $|\max\{a, b\} - \max\{c, d\}| \leq |a - c| + |b - d|$;

iv) $|\min\{a, b\} - \min\{c, d\}| \leq |a - c| + |b - d|$,

válidas para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

12. Construa uma bijeção $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todo ponto $a \in \mathbb{R}$.