4^a Lista de exercícios de Fundamentos de Cálculo

1. (Unicidade do limite) Seja $f: X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$, Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = M$$

então mostre que $L = M$.

2. Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então mostre que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$. Mostre que o recíproco não é verdadeiro, isto é, dê um contraexemplo de uma função $f: X \to \mathbb{R}$ de forma que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$ e no entanto $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L$.

3. Sejam $f, g: X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se g é limitada e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, então mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

4. (Limite da composta) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$ conjuntos não vazios, $f: X \to \mathbb{R}$ e $g: Y \to \mathbb{R}$ duas funções, $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{y\to b} g(y) = L = g(b)$, então mostre que

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = L.$$

5. Mostre diretamente da definição de limite que

i) $\lim\limits_{x\to a} c = c$, quaisquer que sejam $a, c \in \mathbb{R}$;

ii) $\lim\limits_{x\to a} x = a$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

6. Seja $a \in \mathbb{R}$ arbitrário.

i) Mostre que se $|x - a| < 1$ então existe $M > 0$ tal que $|x + a| \leq M$.

ii) Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, tome $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{M}\}$ e mostre que se $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ então $|x^2 - a^2| < \varepsilon$.

iii) Conclua que $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$.

7. Tomando $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ mostre que

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x > 1 - \frac{x^2}{2},$$

e use o Teorema do Confronto para concluir que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

8. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L < M = \lim_{x \to a} g(x),$$

então existe $\delta > 0$ de forma que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$.

9. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções de forma que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, mostre que $L \leq M$.

10. Dê definições precisas para as seguintes expressões:

i) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$;

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$;

iii) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$;

iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

11. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$.

i) se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ e existe $M > 0$ tal que $g(x) > M$ para todo $x \in D(g)$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = \infty$;

ii) se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e existe $N < 0$ tal que $g(x) < N$ para todo $x \in D(g)$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = -\infty$.

12. Sejam X um conjunto ilimitado superiormente, e $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções. Se $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = M$; Mostre que

i) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) + g(x) = L + M$;

ii) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)g(x) = LM$;

iii) $\lim\limits_{x \to \infty} kf(x) = kL$ qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.

13. Em cada caso, dê exemplos de funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ com $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, de forma que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x),$$

mas

i) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$;

ii) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$;

iii) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ para qualquer que seja $L \in \mathbb{R}$ desejado.

14. Em cada caso, dê exemplos de funções $f, g : X \to \mathbb{R}$, de forma que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty = \lim_{x \to a} g(x),$$

mas

i) $\lim_{x \to a} f(x) - g(x) = -\infty$;

ii) $\lim_{x \to a} f(x) - g(x) = \infty$;

iii) $\lim_{x \to a} f(x) - g(x) = L$ para qualquer que seja $L \in \mathbb{R}$ desejado.