2^a Lista de exercícios de Fundamentos de Cálculo

1. Considerando o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ e a relação de ordem usual $\leq$, mostre que
a) **(Desigualdade de Cauchy)** Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.
b) **(Desigualdade de Cauchy com ε)** Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$.
c) **(Desigualdade de Bernoulli)** Para qualquer $a \in \mathbb{R}$ com $a \geq -1$, e $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$.
d) $\sqrt{ab} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

2. Dados x e y elementos de um corpo ordenado $\mathbb{K}$, prove que $|xy| = |x||y|$.

3. Considerando que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é corpo, mostre que:

i) $\sqrt{2}$ é irracional;

ii) o produto de um número racional não nulo por um número irracional é irracional.

4. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito ser denso em $\mathbb{R}$ se (e somente se) qualquer intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ contém pelo menos um elemento de X. Mostre que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$. Dito de outra forma, mostre que qualquer intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ contém pelo menos um número racional e pelo menos um número irracional.

5. Considerando o corpo ordenado dos números racionais $\mathbb{Q}$, mostre que o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q}; \quad x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ não admite supremo nem ínfimo em $\mathbb{Q}$.
Sugestão: Faça uma demonstração por contradição, isto é, suponha que existe $b = \sup X \in \mathbb{Q}$ e obtenha a contradição. O mesmo para o ínfimo.

6. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo da forma $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ ou (a, b) com $a < b$. Mostre que $a = \inf X$ e $b = \sup X$.

7. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios e $f : X \to Y$ uma função.

i) Se $A \subset B \subset X$, então $f(A) \subset f(B)$.

ii) Se $A \subset B \subset Y$, então $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

8. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios, $f : X \to Y$ uma função e $A, B \subset X$. Mostre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

9. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios, $f : X \to Y$ uma função e $A, B \subset X$. Mostre que

$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$. Dê um exemplo para mostrar que a inclusão contrária não ocorre. Mostre que se f é injetora então ocorre a inclusão contrária, $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$.

10. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios, $A, B\subset X$ e $f: X\to Y$ uma função. Mostre que se $A\subset B$, então $f(A)\subset f(B)$. Dê um contra exemplo para mostrar que a recíproca não é verdadeira. Mostre que se f é injetora então vale a recíproca, isto é, se $f(A)\subset f(B)$ então $A\subset B$.

11. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios, $A, B\subset Y$ e $f: X\to Y$ uma função. Mostre que se $A\subset B$, então $f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$. Dê um contra exemplo para mostrar que a recíproca não é verdadeira. Mostre que se f é sobrejetora então vale a recíproca, isto é, se $f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$ então $A\subset B$.

12. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios, $f: X\to Y$ uma função e $A, B\subset Y$. Mostre que:
a) $f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.
b) $f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

13. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios, $f: X\to Y$ uma função e $A\subset X$. Mostre que $A\subset f^{-1}(f(A))$. Dê um contra exemplo para mostrar que não vale a inclusão contrária. Mostre que se f é injetora então vale também a inclusão contrária $f^{-1}(f(A))\subset A$.

14. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios, $f: X\to Y$ uma função e $B\subset Y$. Mostre que $f(f^{-1}(B))\subset B$. Dê um contra exemplo para mostrar que não vale a inclusão contrária. Mostre que se f é sobrejetora, então vale também a inclusão contrária $B\subset f(f^{-1}(B))$.

15. Mostre que a composição de funções é associativa. De outra forma, dadas as funções

$$f: X\to Y, \qquad g: Y\to Z \qquad \text{e} \qquad h: Z\to W,$$

mostre que $(h\circ(g\circ f)) = ((h\circ g)\circ f)$.

16. Em cada caso abaixo, mostre que a função dada é bijetora e obtenha a expressão para a inversa.

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$, sendo $a\in\mathbb{R}$ com $a>0$ e $a\neq 1$.

ii) $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$ dada por $g(x)=x+\sqrt{x}$.

iii) $h:(-1,1)\to\mathbb{R}$ dada por $h(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

iv) $\varphi:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{1\}$ dada por $\varphi(x)=\frac{x}{x-1}$.

v) $\eta:\mathbb{R}\to(0,1)$ dada por $\eta(x)=\frac{1}{1-e^{-x}}$.

17. Sejam X, Y e Z conjuntos não vazios e $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ duas funções. Dê um contra exemplo para mostrar que se $(g \circ f)$ é bijetora não necessariamente f e g são bijetoras. Mostre que se a composta $(g \circ f) : X \to Z$ for bijetora, então g é sobrejetora e f é injetora.

18. Seja $f : X \to Y$ uma função bijetora. Mostre que f^{-1} é também bijetora, e além disso $(f^{-1})^{-1} = f$.

19. Sejam X, Y e Z conjuntos não vazios e $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ duas funções bijetoras. Então mostre que

$$(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1}).$$

20. Seja X um conjunto (não vazio) e $f : X \to X$ uma função tal que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in X$. Mostre que f é bijetora.