Construção de funções elementares de variável complexa

Texto complementar da disciplina de Variáveis Complexas - 2025

Professor Sandro Marcos Guzzo

Resumo: Neste texto vamos mostrar como é feita a definição de algumas funções elementares a valores complexos. Especificamente abordaremos a função exponencial e as funções trigonométricas seno e cosseno, incluindo o caso hiperbólico. A ideia é definir estas funções elementares como séries de potência. Porém, as séries de potências não fornecem uma expressão fácil de ser utilizada. Manipularemos então a série de potências para obter uma outra expressão mais simples para estas funções complexas.

1 A função exponencial

Nesta seção vamos definir a função exponencial de variável complexa $f(z) = e^z$ a partir da série de potência da função exponencial de variável real. A expansão em série de potências da função exponencial de variável real $f(x) = e^x$ é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots ,$$

válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Mas a série de potências do lado direito, faz sentido se x for um número complexo, desde que a série seja convergente. É natural então pensarmos que podemos definir

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots ,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que a série de potências seja convergente. De acordo com o teste da razão, qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{(n+1)} = 0 < 1,$$

donde a série converge (absolutamente) para todo $z \in \mathbb{C}$.

Temos portanto a definição seguinte.

Definição 1. A função exponencial de variável complexa é a função que a cada $z \in \mathbb{C}$ associa

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots .$$

Naturalmente esta definição é importante, mas dificulta o trabalho. O que gostaríamos é escrever e^z na forma algébrica $e^z = e^{x+iy} = u + iv$, com u e v funções reais das variáveis reais x e y. Este será o nosso próximo passo.

Lembremos primeiro que

$$(x+yi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(yi)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k}(yi)^k.$$

Começamos com

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+yi)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k}(yi)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^k}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

O lema a seguir nos ajudará a trabalhar com o somatório duplo do segundo membro desta última igualdade.

Lema 2. *Para qualquer* $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(n-k)!} = e^x \frac{1}{m!}(yi)^m + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+m+1}}{(k+m+1)!(n-k)!}.$$

Prova. De fato, começando com

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(n-k)!},$$

vamos separar o caso $n = 0$ do somatório externo, e depois os casos $k = 0$ do somatório interno. Desta forma, para qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(n-k)!} \\ &\qquad = \frac{(yi)^m}{m!} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(n-k)!} \\ &\qquad = \frac{(yi)^m}{m!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n (yi)^m}{m!n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(n-k)!} \\ &\qquad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (yi)^m}{m!n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(n-k)!} \\ &\qquad = \frac{(yi)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(n-k)!} \\ &\qquad = \frac{(yi)^m}{m!} e^x + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+m+1}}{(k+m+1)!(n-k)!}. \end{aligned}$$

$\square$

Usando agora repetidamente este lema temos que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^k}{k!(n-k)!}$$

$$= e^x + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+1}}{(k+1)!(n-k)!}$$
$$= e^x\,(1+yi) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+2}}{(k+2)!(n-k)!}$$
$$= e^x\left(1+yi+\frac{(iy)^2}{2!}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+3}}{(k+3)!(n-k)!}$$
$$= e^x\left(1+yi+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+4}}{(k+4)!(n-k)!}$$
$$= e^x\left(1+yi+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\frac{(iy)^4}{4!}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+5}}{(k+5)!(n-k)!}$$
$$= e^x\left(1+yi+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\frac{(iy)^4}{4!}+\frac{(iy)^5}{5!}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}(yi)^{k+6}}{(k+6)!(n-k)!},$$

e assim sucessivamente. Procedendo indefinidamente (ou indutivamente), obteremos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} e^x \frac{(iy)^n}{n!},$$

e desta forma, levando em conta que $i^{2k} = (-1)^k$ e que $i^{2k+1} = (-1)^k i$, separamos do somatório os termos com n par (termos reais) e os termos com n ímpar (termos imaginários), obtendo

$$e^z = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + ie^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Finalmente, usando as expressões

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

válidas para todo $y \in \mathbb{R}$, então

$$e^z = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + ie^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y.$$

Temos portanto a definição alternativa para a função exponencial de um número complexo $z = x + iy$, sem a necessidade do uso da série de potência.

Definição 3. A função exponencial de variável complexa é a função que a cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ associa

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

2 As funções trigonométricas

Usando as séries de potências das funções trigonométricas de variável real, vamos construir as funções trigonométricas de variáveis complexas. Já sabemos que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots,$$
$$\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots,$$
$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observe que o lado direito destas igualdades faz sentido se x for um número complexo, desde que as séries sejam convergentes. Isto nos sugere que a igualdade possa ser utilizada para definir as funções trigonométricas seno e cosseno para os números complexos que tornam a série convergente. Nestes termos, se $z \in \mathbb{C}$, então definimos

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \frac{1}{9!}z^9 - \frac{1}{11!}z^{11} + \cdots, \tag{1}$$
$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \frac{1}{8!}z^8 - \frac{1}{10!}z^{10} + \cdots, \tag{2}$$
$$\operatorname{senh} z = z + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \frac{1}{7!}z^7 + \frac{1}{9!}z^9 + \frac{1}{11!}z^{11} + \cdots, \tag{3}$$
$$\cosh z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{1}{6!}z^6 + \frac{1}{8!}z^8 + \frac{1}{10!}z^{10} + \cdots, \tag{4}$$

desde que as séries convirjam.

Precisamos determinar os valores $z \in \mathbb{C}$ que tornam estas séries convergentes.

A série de potências (1) converge qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$, pois

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| -\frac{\frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}}{\frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} \frac{z^{2n+1}}{z^{2n-1}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)2n} |z^2| = 0 < 1,
\end{aligned}$$

para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Analogamente para as séries de potências em (2), (3) e (4).

Naturalmente as definições (1)-(4) não são muito cômodas para trabalharmos. Vamos então tentar modificar estas expressões para redefinir seno e cosseno de números complexos em termos de funções reais de variável real. Independente de modificarmos estas expressões, os membros na direita destas igualdades são números complexos, e então o que esperamos é que possamos reescrever a série de potências como sendo um número complexo mais simples de ser manipulado, dado na forma tradicional $u + vi$ com $u, v \in \mathbb{R}$.

Comecemos então com a identidade (1), colocando $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Temos então

$$\operatorname{sen}(x + yi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x + yi)^{2n+1}. \tag{5}$$

Usando a fórmula da expansão binomial para o termo $(x + yi)^{2n+1}$, podemos reescrever (5) como

$$\operatorname{sen}(x + yi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (x + yi)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n-k+1)!} x^{2n-k+1}(yi)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^k}{k!(2n-k+1)!}.$$

O próximo lema será útil para trabalhar com o somatório duplo do segundo membro desta última igualdade.

Lema 4. *Para qualquer* $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(k+m)!(2n-k+1)!} x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}$$
$$= \frac{(yi)^m}{m!} \operatorname{sen} x + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!} \cos x - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m+2}}{(k+m+2)!(2n-k+1)!}.$$

Prova. Tomando

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!},$$

vamos separar o caso $n = 0$ do somatório externo, e depois os casos $k = 0$ do somatório interno. Desta forma, para qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!}$$
$$= \frac{x(yi)^m}{m!} + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!}$$
$$= \frac{x(yi)^m}{m!} + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}(yi)^m}{m!(2n+1)!} + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!} \right)$$
$$= \frac{x(yi)^m}{m!} + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}(yi)^m}{m!(2n+1)!}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}(yi)^m}{m!(2n+1)!} + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!}$$
$$= \frac{(yi)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!}$$
$$= \frac{(yi)^m}{m!} \operatorname{sen} x + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!}.$$

Separando novamente os temos em $k = 1$ do somatório interno, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!}$$
$$= \frac{(yi)^m}{m!} \operatorname{sen} x + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(yi)^m}{m!}\operatorname{sen} x + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!} \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n x^{2n}(yi)^{m+1}}{(m+1)!(2n)!} + \sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!}\right) \\
&= \frac{(yi)^m}{m!}\operatorname{sen} x + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}(yi)^{m+1}}{(m+1)!(2n)!} \\
&\qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{2n+1}\frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+1)!} \\
&= \frac{(yi)^m}{m!}\operatorname{sen} x + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}(yi)^{m+1}}{(m+1)!(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{2n+3}\frac{(-1)^n x^{2n-k+3}(yi)^{k+m}}{(k+m)!(2n-k+3)!} \\
&= \frac{(yi)^m}{m!}\operatorname{sen} x + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m+2}}{(k+m+2)!(2n-k+1)!} \\
&= \frac{(yi)^m}{m!}\operatorname{sen} x + \frac{(yi)^{m+1}}{(m+1)!}\cos x - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+m+2}}{(k+m+2)!(2n-k+1)!},
\end{aligned}
$$

exatamente como desejado. □

Usando agora repetidamente este lema temos que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x+yi) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^k}{k!(2n-k+1)!} \\
&= \operatorname{sen} x + (yi)\cos x - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+2}}{(k+2)!(2n-k+1)!} \\
&= \left(1 - \frac{(yi)^2}{2!}\right)\operatorname{sen} x + \left(yi - \frac{(yi)^3}{3!}\right)\cos x \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+4}}{(k+4)!(2n-k+1)!} \\
&= \left(1 - \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^4}{4!}\right)\operatorname{sen} x + \left(yi - \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^5}{5!}\right)\cos x \\
&\qquad - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+6}}{(k+6)!(2n-k+1)!} \\
&= \left(1 - \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^4}{4!} - \frac{(yi)^6}{6!}\right)\operatorname{sen} x + \left(yi - \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^5}{5!} - \frac{(yi)^7}{7!}\right)\cos x \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-1)^n x^{2n-k+1}(yi)^{k+8}}{(k+8)!(2n-k+1)!},
\end{aligned}
$$

e assim sucessivamente. Desta forma, obtemos

$$
\operatorname{sen}(x+yi) = \operatorname{sen} x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(yi)^{2n}}{(2n)!} + \cos x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(yi)^{2n+1}}{(2n+1)!},
$$

e usando o fato de que $(yi)^{2n} = y^{2n}i^{2n} = (-1)^n y^{2n}$, e que $(yi)^{2n+1} = y^{2n+1}i^{2n+1} = (-1)^n y^{2n+1}i$, então temos que

$$
\operatorname{sen}(x+yi) = \operatorname{sen} x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(yi)^{2n}}{(2n)!} + \cos x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(yi)^{2n+1}}{(2n+1)!}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{sen} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + \cos x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n y^{2n+1} i}{(2n+1)!} \\
&= \operatorname{sen} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \cos x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y.
\end{aligned}
$$

Temos portanto uma definição alternativa e mais elegante para a definição do seno de um número complexo $z = x + yi$. Definição esta que será também útil para os nossos propósitos. Não estamos interessados em repetir o procedimento anterior, mas ele pode ser aplicado também às funções cosseno, seno hiperbólico e cosseno hiperbólico para obter expressões mais simples. Como não repetiremos o processo anterior apenas enunciaremos as expressões finais na próxima definição.

Definição 5. Dado $z = x + iy \in \mathbb{C}$, os números complexos seno de z, cosseno de z, seno hiperbólico de z e cosseno hiperbólico de z, são dados respectivamente por,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x, \\
\cos z &= \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y, \\
\operatorname{senh} z &= \operatorname{senh}(x+iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \operatorname{sen} y \cosh x, \\
\cosh z &= \cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y.
\end{aligned}
$$

As demais funções trigonométricas são definidas como quociente destas, como no caso real

$$
\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \text{e} \qquad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z},
$$

e para o caso hiperbólico

$$
\operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \qquad \operatorname{ctgh} z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}, \qquad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z},
$$

para todos os valores de z tais que os denominadores não se anulem.