

Solução da 2ª Prova de Cálculo Diferencial e Integral IV

Matemática - 3º ano - 11/12/2025

1. Usando os testes da razão ou da raiz, decida se as séries

$$i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^n} \qquad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{2n}}{e^n}$$

convergem, divergem ou os testes são inconclusivos.

Solução: Para o item (i) usaremos o teste da razão. Nestes termos,

$$\begin{aligned} \lim \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}}{(-1)^n \frac{n!}{2^n}} \right| &= \lim \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} \\ &= \lim \frac{(n+1)}{2} = \infty, \end{aligned}$$

e segue do teste da razão que a série é divergente.

Para o item (ii), usaremos o teste da raiz. Desta forma,

$$\begin{aligned} \lim \sqrt[n]{\left| \frac{(1 + \frac{1}{n})^{2n}}{e^n} \right|} &= \lim \frac{\sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})^{2n}}}{\sqrt[n]{e^n}} \\ &= \lim \frac{(1 + \frac{1}{n})^2}{e} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Como o limite existe e é igual a $\frac{1}{e} < 1$ então, pelo teste da raiz, a série converge (absolutamente). ■

2. Determine o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Solução: Usaremos o teste da razão. Primeiro

$$\begin{aligned} \lim \left| \frac{(-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}} \right| &= \lim \frac{|x-1|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x-1|^n} \\ &= \lim |x-1| \cdot \frac{n}{n+1} = |x-1|. \end{aligned}$$

De acordo com o teste da razão a série converge (absolutamente) quando $|x-1| < 1$ e portanto quando $x \in (0, 2)$, e diverge quando $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Contudo, o teste é inconclusivo para os valores $x = 0$ e $x = 2$. Estes dois pontos necessitam investigação particular.

Para $x = 0$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n},$$

que é a série harmônica divergente multiplicada pela constante -1 e portanto divergente.

Para $x = 2$, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

que é uma série alternada que satisfaz os critérios de convergência das séries alternadas.

Logo, a série dada é convergente em todo o intervalo $(0, 2]$. ■

3. Construa a série de MacLaurin da função $f(x) = \cos(x)$ e use a expressão obtida para determinar uma série para a função $g(x) = \cos(\sqrt{x})$ para $x \geq 0$.

Solução: Lembremos que a série de MacLaurin de uma função f é a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ que torne a série convergente.

Como

$$\begin{aligned} f(0) &= \cos(0) = 1 \\ f'(0) &= -\sin(0) = 0 \\ f''(0) &= -\cos(0) = -1 \\ f'''(0) &= \sin(0) = 0 \\ f^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \dots, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ que torne a série convergente. Pelo teste da razão a série converge para qualquer $x \in \mathbb{R}$ já que

$$\lim \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}}{\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}} \right| = \lim \frac{|x|^{2n+2} (2n)!}{(2n+2)! |x|^{2n}} = \lim \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$

Agora, dado qualquer $x \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}$, usando a série obtida anteriormente no número real $\sqrt{x}$ obtemos

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}x^2 - \frac{1}{6!}x^3 \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n + \cdots$$

■

4. Usando o limite das somas de Riemann, calcule a integral dupla

$$\iint_R x + y dA$$

sendo $R = [0, 2] \times [0, 3] \subset \mathbb{R}^2$.

Solução: Vamos considerar uma partição do intervalo $[0, 2]$ dividindo este intervalo em n partes iguais, cada uma de tamanho $\Delta x = \frac{2}{n}$. Também dividimos o intervalo $[0, 3]$ em m partes iguais, cada uma de tamanho $\Delta y = \frac{3}{m}$. Porticionamos portanto o retângulo $[0, 2] \times [0, 3]$ em mn partes cada uma designada por R_{ij} para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

A soma de Riemann de $f(x, y)$ em R é portanto

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y,$$

sendo $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$.

Escolhemos $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$ colocando

$$x_i^* = i\Delta x = \frac{2i}{n} \quad \text{e} \quad y_j^* = j\Delta y = \frac{3j}{m},$$

e então

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta x \Delta y \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f\left(\frac{2i}{n}, \frac{3j}{m}\right) \frac{2}{n} \frac{3}{m} \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{6}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{2i}{n} + \frac{3j}{m} \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{6}{mn} \sum_{i=1}^n \frac{2im}{n} + \frac{3}{m} \frac{m(m+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{6}{mn} \left[\frac{2m}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3(m+1)n}{2} \right] \\
&= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{6}{mn} \left[m(n+1) + \frac{3(m+1)n}{2} \right] \\
&= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{6(n+1)}{n} + \frac{9(m+1)}{m} = 6 + 9 = 15.
\end{aligned}$$

■

5. Escreva a integral iterada que representa $\iint_R f(x, y) dA$ sendo R o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(1, 4)$ e $(3, 2)$.

Solução: A equação da reta que passa pelos pontos $(1, 1)$, $(3, 2)$ é $2y - x = 1$ ou $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$ e a reta que passa pelos pontos $(1, 4)$, $(3, 2)$ é a reta de equação $y + x = 5$ ou $y = 5 - x$. Desta forma podemos fazer $1 \leq x \leq 3$ e $\frac{1}{2} + \frac{x}{2} \leq y \leq 5 - x$. Segue que

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_1^3 \int_{\frac{1}{2} + \frac{x}{2}}^{5-x} f(x, y) dy dx.$$

■

6. Monte a integral iterada e calcule a integral dupla

$$\iint_R (x+1)^2 + yx dA$$

sendo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 \leq x \leq 2, \quad x-2 \leq y \leq 4-x^2\}$.

Solução: Primeiro temos que

$$\iint_R (x+1)^2 + yx dA = \int_0^2 \int_{x-2}^{4-x^2} (x+1)^2 + yx dy dx.$$

Então

$$\begin{aligned}
&\iint_R (x+1)^2 + yx dA \\
&= \int_0^2 \int_{x-2}^{4-x^2} (x+1)^2 + yx dy dx \\
&= \int_0^2 (x+1)^2 y + \frac{y^2 x}{2} \Big|_{y=x-2}^{4-x^2} dx \\
&= \int_0^2 (x+1)^2 (4-x^2) + \frac{(4-x^2)^2 x}{2} - (x+1)^2 (x-2) - \frac{(x-2)^2 x}{2} dx \\
&= \int_0^2 (x+1)^2 (4-x^2-x+2) + \frac{x}{2} ((4-x^2)^2 - (x-2)^2) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 (x^2 + 2x + 1)(6 - x - x^2) + \frac{x}{2}(12 - 4x - x^2 + x^4) dx \\
&= \int_0^2 (6x^2 + 12x + 6 - x^3 - 2x^2 - x - x^4 - 2x^3 - x^2) + (6x - 2x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2}) dx \\
&= \int_0^2 \frac{x^5}{2} - 2x^4 - \frac{15x^3}{2} + 5x^2 + 18x + 6 dx \\
&= \left. \frac{x^6}{12} - \frac{2x^5}{5} - \frac{15x^4}{8} + \frac{5x^3}{3} + 9x^2 + 6x \right|_{x=0}^2 \\
&= \frac{64}{12} - \frac{64}{5} - \frac{15 \cdot 16}{8} + \frac{5 \cdot 8}{3} + 36 + 12 \\
&= \frac{16}{3} - \frac{64}{5} - 30 + \frac{40}{3} + 36 + 12 \\
&= \frac{80 - 192 - 450 + 200 + 540 + 180}{15} = \frac{358}{15}.
\end{aligned}$$

■