4^a Prova de Análise Real

Matemática - 4^o ano - 06/05/2024

---

1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funções com $f(X) \subset Y$. Se f é contínua em $a \in X$ e g é contínua em $f(a) \in Y$, então mostre que $(g \circ f) : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a.

Solução: Para provar que $(g \circ f) : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Para este ε, como g é contínua em $f(a)$, existe $\delta_1 > 0$ de forma que

$$|g(y) - g(f(a))| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad y \in Y \cap (f(a) - \delta_1, f(a) + \delta_1).$$

Mas, para este $\delta_1 > 0$, como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1 \qquad \text{sempre que} \qquad x \in X \cap (a - \delta, a + \delta),$$

ou equivalentemente,

$$f(x) \in (f(a) - \delta_1, f(a) + \delta_1) \qquad \text{sempre que} \qquad x \in X \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Nestes termos, para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, temos que $f(x) \in (f(a) - \delta_1, f(a) + \delta_1)$ e por conseguinte, $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$. Isto prova que $(g \circ f)$ é contínua em $a \in X$. ■

---

2. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e g é limitada inferiormente, então mostre que $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \infty$.

Solução: Como g é limitada inferiormente, existe $C < 0$ de forma que $C < g(x)$ para todo $x \in X$.

Para provar que $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \infty$ seja $M > 0$ arbitrário. Como $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, então para o número $|M - C| \geq 0$ existe $\delta > 0$ de forma que

$$|M - C| < f(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \in X \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Desta forma, para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, temos que $f(x) > |M - C| \geq M - C$ e portanto $f(x) + g(x) > (M - C) + C = M$. Segue que $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \infty$. ■

---

3. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $a \in X$. Mostre que f é limitada em uma vizinhança de a, isto é, existem $C > 0$ e $\delta > 0$ de forma que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.

Solução: Para o número $\varepsilon = 1 > 0$, da continuidade de f em a, existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon = 1 \qquad \text{sempre que} \qquad x \in X \cap (a - \delta, a + \delta),$$

ou equivalentemente,

$$f(x) \in (f(a)-1, f(a)+1) \qquad \text{sempre que} \qquad x \in X \cap (a-\delta, a+\delta).$$

Nestes termos, para todo $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta)$, temos que

$$-|f(a)| - 1 \leq f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1 \leq |f(a)| + 1.$$

O resultado fica então provado para $C = |f(a)| + 1 > 0$. ■

---

4. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Mostre que $|f|$ é também uniformemente contínua em $[a,b]$.

Solução: Para provar que $|f|$ é uniformemente contínua, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para este ε, como f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x, y \in [a,b] \quad \text{e} \quad |x-y| < \delta,$$

Desta forma, para todos $x, y \in [a,b]$ com $|x-y| < \delta$ temos que

$$||f|(x) - |f|(y)| = ||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

o que prova que $|f|$ é uniformemente contínua. ■

---

5. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $a \in X \cap X'$. Mostre que (fg) é também derivável em a e além disso,

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Solução: **(Modo 1): (Usando o limite quando $h \to 0$)** Para provar que (fg) é derivável em a, provaremos que existe o limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h}$. Primeiro notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h} &= \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h} \\
&= f(a+h)\frac{g(a+h) - g(a)}{h} + g(a)\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.
\end{aligned}$$

Como f é derivável em a, então existe o limite $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ e além disso, este limite é igual a $f'(a)$. Também, do fato de f ser derivável em a temos que f é contínua em a e então existe o limite $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ e além disso, este limite é igual a $f(a)$. Como g é derivável em a, existe também o limite $\lim\limits_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$ e além disso, este limite é igual a $g'(a)$. Segue que existe o limite de cada um dos fatores do último membro da igualdade e portanto existe o limite do primeiro membro e mais ainda,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} f(a+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} + g(a)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &= f(a)g'(a)+g(a)f'(a)\\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Segue que (fg) é derivável em a com $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(Modo 2): (Usando o limite quando $x \to a$) Para provar que (fg) é derivável em a, provaremos que existe o limite $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}$. Primeiro notemos que

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a}\\ &= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\end{aligned}$$

Como f é derivável em a, então existe o limite $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e além disso, este limite é igual a $f'(a)$. Também, do fato de f ser derivável em a temos que f é contínua em a e então existe o limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e além disso, este limite é igual a $f(a)$. Como g é derivável em a, existe também o limite $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ e além disso, este limite é igual a $g'(a)$. Segue que existe o limite de cada um dos fatores do último membro da igualdade e portanto existe o limite do primeiro membro e mais ainda,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= f(a)g'(a)+g(a)f'(a)\\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Segue que (fg) é derivável em a com $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. ■

---

6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $a \in X$, e seja (x_n) uma sequência arbitrária com $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$. Mostre que $\lim f(x_n) = f(a)$.

Solução: Seja então (x_n) uma sequência arbitrária com $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$. Para provar que $\lim f(x_n) = f(a)$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para este ε, como f é contínua em a, existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x \in X \cap (a-\delta, a+\delta).$$

Para este $\delta > 0$, como $\lim x_n = a$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$|x_n - a| < \delta \qquad \text{sempre que} \qquad n > n_0.$$

Nestes termos, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_0$ temos que $|x_n - a| < \delta$, donde $x_n \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$ e portanto $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Isto prova que $\lim f(x_n) = f(a)$. ■

Para toda esta prova, considere $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.