4^a Prova de Análise Real

Matemática - 4^o ano - 06/05/2024

Nome: ______________________________

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: ________
Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

---

1. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ funções com $f(X) \subset Y$. Se f é contínua em $a \in X$ e g é contínua em $f(a) \in Y$, então mostre que $(g \circ f) : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a.

---

2. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ e g é limitada inferiormente, então mostre que $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \infty$.

---

3. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $a \in X$. Mostre que f é limitada em uma vizinhança de a, isto é, existem $C > 0$ e $\delta > 0$ de forma que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.

---

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua. Mostre que $|f|$ é também uniformemente contínua em $[a, b]$.

---

5. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em $a \in X \cap X'$. Mostre que (fg) é também derivável em a e além disso,

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

---

6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $a \in X$, e seja (x_n) uma sequência arbitrária com $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$. Mostre que $\lim f(x_n) = f(a)$.

Para toda esta prova, considere $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.