Solução da 3^a Prova de Análise Real

Matemática - 4^o ano - 09/05/2023

---

1. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto, e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $a + X = \{a + x; \quad x \in X\}$ é aberto.

Solução: Seja $y = x + a \in x + A$ para algum $a \in A$. Como A é aberto, existe $\varepsilon > 0$ de forma que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$. Vamos mostrar que $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset x+A$. De fato, dado qualquer $z \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, temos que

$$x + a - \varepsilon = y - \varepsilon < z < y + \varepsilon = x + a + \varepsilon,$$

donde

$$a - \varepsilon < z - x < a + \varepsilon,$$

e portanto $(z - x) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$. Segue que $z = x + (z - x) \in x + A$, provando a inclusão desejada $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset x + A$, e mostrando que $x + A$ é aberto.

$\blacksquare$

---

2. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto arbitrário. Mostre que:

i) $\overline{X}^C = int(X^C)$.

ii) $\overline{X^C} = (int(X))^C$.

Solução: Para o primeiro item, temos que

$$\begin{aligned}
x \in \overline{X}^C \quad &\Leftrightarrow \quad x \notin \overline{X} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{existe} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X = \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \text{existe} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X^C \quad \Leftrightarrow \quad x \in int(X^C).
\end{aligned}$$

Para o item (ii), podemos usar o item (i). Podemos escrever

$$int(X) = int((X^C)^C) = (\overline{X^C})^C,$$

e a igualdade desejada segue tomando o complementar em ambos os membros.

Para provar o item (ii) de forma direta (sem usar (i)), temos que

$$\begin{aligned}
x \in \overline{X^C} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{para todo} \quad \varepsilon > 0 \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X^C \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \text{para todo} \quad \varepsilon > 0 \quad (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \not\subset X \\
&\Leftrightarrow \quad x \notin int(X) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (int(X))^C.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

---

3. Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto e $F \subset \mathbb{R}$ é fechado então mostre que $(K \cap F)$ é compacto.

Solução: **Modo 1: (Por cobertura aberta)** Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de $(K \cap F)$ por abertos. Isto é,

$$(K \cap F) \subset (\cup A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda,$$

e vamos mostrar que desta cobertura, podemos obter uma subcobertura finita.

Como F é fechado, então F^C é aberto, e além disso,

$$K = K \cap (F \cup F^C) = (K \cap F) \cup (K \cap F^C) \subset (K \cap F) \cup F^C \subset (\cup A_\lambda) \cup F^C.$$

Segue que $(\cup A_\lambda) \cup F^C$ é uma cobertura de K por abertos, e sendo K compacto, podemos extrair uma subcobertura finita, isto é, existem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in L$ de forma que

$$K \subset (A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}) \cup F^C,$$

donde

$$(K \cap F) \subset K \subset (A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n}) \cup F^C,$$

Mas como cada ponto $x \in K \cap F \subset F$ não pertence a F^C, podemos eliminar F^C da união acima, e portanto

$$(K \cap F) \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n},$$

donde $(K \cap F)$ é compacto.

Modo 2: Nesta abordagem usaremos o resultado: Um conjunto X é compacto, se e somente se, é fechado e limitado. Como K é compacto, então K é fechado e limitado. Assim, $K \cap F \subset K$ é limitado. Além disso, sendo F fechado, então $K \cap F$ é também fechado. Segue que $K \cap F$ é fechado e limitado, e portanto compacto. $\blacksquare$

---

4. **(Teorema do confronto)** Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ três funções e $a \in X'$, satisfazendo

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

para todo $x \in X$. Se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x),$$

então mostre que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$.

Solução: Para mostrar que $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$, seja $\varepsilon > 0$.

Então, para este $\varepsilon > 0$, como $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$, então existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ de forma que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{para todos} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_1, a + \delta_1),$$

ou equivalentemente

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \qquad \text{para todos} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_1, a + \delta_1),$$

e também

$$|g(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{para todos} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_2, a + \delta_2),$$

ou equivalentemente

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \qquad \text{para todos} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_2, a + \delta_2).$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, temos que para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$,

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$$

isto é,

$$|h(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta),$$

e portanto $\lim_{x\to a} h(x) = L$. ■

---

5. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, mostre que L é ponto aderente do conjunto $Im(f) = f(X)$.

Solução: Para provar que L é ponto aderente de $f(X)$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para este ε, da hipótese $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta),$$

ou equivalentemente,

$$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta),$$

Como $a \in X'$ então qualquer que seja $\delta > 0$, temos que

$$(X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta) \neq \emptyset$$

e então seja,

$$x_0 \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Nestes termos $f(x_0) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e como também $f(x_0) \in Im(f) = f(X)$ temos que

$$f(x_0) \in X \cap (L - \varepsilon, L + \varepsilon),$$

donde $f(X) \cap (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \neq \emptyset$ e L é ponto aderente de $f(X)$. ■

---

6. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função com $f(x) > 0$ para todo $x \in X$ e $a \in X'$. Mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ se e somente se $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Solução: Suponha que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ e para provar que $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$ seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para o número $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ da hipótese $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x)| > M = \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta).$$

Nestes termos para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)$ temos que

$$\left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon,$$

donde segue que $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Reciprocamente, suponha que $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$ e para provar que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, seja $M > 0$ arbitrário. Para o número $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$, da hipótese $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$, existe $\delta > 0$ de forma que

$$\left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon = \frac{1}{M} \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta).$$

Desta forma, para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)$ temos que

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{\frac{1}{f(x)} - 0}\right| > M,$$

provando que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. ■

Para toda esta prova, considere $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.