Solução da 3^a Prova de Análise Real

Matemática - 4^o ano - 09/06/2022

---

1. Considere A e F, subconjuntos de $\mathbb{R}$, de forma que A é aberto e F é fechado. Mostre que $F - A$ é fechado e que $A - F$ é aberto. Em pelo menos um dos itens deve-se usar obrigatoriamente a definição de conjunto aberto e de conjunto fechado.

Solução: Neste solução, apresentaremos primeiro as demonstrações usando somente as definições de conjunto aberto e conjunto fechado.

(i) Vamos mostrar que $F - A$ é fechado e para isso, provaremos apenas que $\overline{F - A} \subset F - A$. Se $\overline{F - A} = \emptyset$ então claramente $\overline{F - A} \subset F - A$. Se por outro lado, $\overline{F - A} \neq \emptyset$ então seja $a \in \overline{F - A}$ arbitrário, isto é, a é ponto aderente de $(F - A)$. Queremos provar que $a \in F - A$ e para isso provaremos que $a \in F$ e $a \notin A$.

Para mostrar que $a \in F$, vamos mostrar que $a \in \overline{F} = F$ e então, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para este ε, como $a \in \overline{F - A}$, então

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (F - A) \neq \emptyset$$

e como $(F - A) \subset F$, segue que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (F - A) \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap F,$$

donde

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap F \neq \emptyset,$$

provando que $a \in \overline{F} = F$.

Agora vamos mostrar que $a \notin A$ por contradição. Supondo que $a \in A$ então como A é aberto, então $a \in int(A)$. Nestes termos, existe $\varepsilon > 0$ de forma que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$, e com isso temos que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (F - A) = \emptyset,$$

pois todo ponto $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ pertente também a A e portanto $x \notin (F - A)$. Isto contradiz o fato de que a é ponto aderende de $F - A$. Segue que $a \notin A$ também.

Assim $a \in F$ e $a \notin A$ e então $a \in F - A$ provando que $\overline{F - A} \subset F - A$ e que $F - A$ é fechado.

(ii) Agora mostraremos que $A - F$ é aberto. Para isso provaremos apenas que $A - F \subset int(A - F)$. Se $A - F = \emptyset$, então claramente $A - F \subset int(A - F)$. Se por outro lado $A - F \neq \emptyset$, então seja $a \in A - F$, isto é, $a \in A$ e $a \notin F$. Como A é aberto então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subset A.$$

Como F é fechado, então $F = \overline{F}$ e então $a \notin \overline{F}$. Da (negação da) definição de ponto aderente, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \cap F = \emptyset.$$

Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, temos que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A \qquad \text{e} \qquad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap F = \emptyset,$$

e então $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (A - F)$ já que todo $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ satisfaz $x \in A$ e $x \notin F$. Segue que $a \in int(A - F)$ donde $(A - F) \subset int(A - F)$, e $(A - F)$ é aberto.

Agora, alternativamente apresentaremos uma solução possível envolvendo resultados já provados.

(i) Para provar que $F - A$ é fechado, vamos provar que $(F - A)^C$ é aberto. Mas $(F - A)^C = F^C \cup A$. Como F é fechado, então F^C é aberto, e sendo A aberto, então a união arbitrária de abertos é aberto. Segue que $F^C \cup A = (F - A)^C$ é aberto e portanto $(F - A)$ é fechado.

(ii) Para ver que $A - F$ é aberto, basta provarmos que $(A - F)^C$ é fechado. Mas $(A - F)^C = A^C \cup F$. Com A é aberto, então A^C é fechado e sendo também F fechado, temos que a união finita de fechados é fechado. Segue que $A^C \cup F = (A - F)^C$ é fechado e portanto $(A - F)$ é aberto. ■

---

2. Mostre que $int(X) \subset X'$ qualquer que seja $X \subset \mathbb{R}$. Dito de outra forma, todo ponto interior de X é ponto de acumulação de X.

Solução: Se $int(X) = \emptyset$ então claramente $int(X) \subset X'$ qualquer que seja X'.

Se por outro lado $int(X) \neq \emptyset$, seja $a \in int(X)$. Para provar que $a \in X'$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário, e queremos mostrar que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset.$$

De fato, da definição de ponto interior, existe $\varepsilon_1 > 0$ de forma que $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subset X$. Tomemos $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon, \varepsilon_1\} > 0$, e temos claramente que $b = a + \frac{\varepsilon_2}{2} \in (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subset X$ donde $b \neq a$ e $b \in X$. Segue que

$$(a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset,$$

e como $(a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, então

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset,$$

mostrando que $a \in X'$. Segue que $int(X) \subset X'$. ■

---

3. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $a \in X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ então mostre que $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |L|$. Dê um contra-exemplo para mostrar que o recíproco não é necessariamente verdadeiro, isto é, se $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |L|$ não necessariamente se tem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Solução: Para provar que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$ seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Para este ε, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x-a| < \delta.$$

Desta forma para todo $x \in X$ com $0 < |x-a| < \delta$, temos que

$$||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon,$$

provando que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$.

Para o contra-exemplo, basta considerar a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Claramente $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |1|$ mas não existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. ■

---

4. (Teorema do confronto) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e $a \in X'$. Suponha que $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ são funções que satisfazem

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

para todo $x \in X$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, então mostre que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

Solução: Para provar que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Para este $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ existe $\delta_1 > 0$ de forma que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x-a| < \delta_1,$$

ou equivalentemente

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x \in (X - \{a\}) \quad \text{e} \quad x \in (a - \delta_1, a + \delta_1).$$

Também, como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, então existe $\delta_2 > 0$ de forma que

$$|g(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x \in X \quad \text{e} \quad 0 < |x-a| < \delta_2,$$

ou equivalentemente

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x \in (X - \{a\}) \quad \text{e} \quad x \in (a - \delta_2, a + \delta_2).$$

Tomando $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2\}$, então para todo $x \in (X - \{a\})$ com $x \in (a - \delta, a + \delta)$ temos que

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon,$$

ou equivalentemente,

$$|h(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \quad \text{e} \quad x \in (a - \delta, a + \delta).$$

provando que $\lim h(x) = L$. $\blacksquare$

---

5. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $a \in X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então mostre que L é ponto aderente do conjunto $Im(f)$.

Solução: Para provar que $L \in \overline{Im(f)}$ temos que provar que $(L - \varepsilon, L + \varepsilon) \cap Im(f) \neq \emptyset$, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ dado.

Seja então $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então para este ε existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Como $a \in X'$ então para este $\delta > 0$, o conjunto $(X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ é obrigatoriamente não vazio. Segue que existe $x_0 \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ e para este x_0, denotando $y_0 = f(x_0) \in Im(f)$, temos obrigatoriamente que $|f(x_0) - L| < \varepsilon$ ou equivalentemente, $y_0 = f(x_0) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Assim,

$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon) \cap Im(f) \neq \emptyset,$$

como desejado. $\blacksquare$

---

6. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $a \in X'$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções. Se f é limitada em uma vizinhança de a, e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, então mostre que

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \infty.$$

Solução: Para provar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = \infty$, seja $M \in \mathbb{R}$ arbitrário.

Como f é limitada em uma vizinhança de a então existe $\delta_1 > 0$ de forma que

$$|f(x)| \leq L \qquad \text{para todo} \qquad x \in X \cap (a - \delta_1, a + \delta_1).$$

Além disso, como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ então para o número $M + L \in \mathbb{R}$, existe $\delta_2 > 0$ de forma que

$$g(x) > M + L \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_2, a + \delta_2).$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ temos que se $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$ então

$$x \in X \cap (a - \delta_1, a + \delta_1) \qquad \text{e} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_2, a + \delta_2),$$

e portanto

$$f(x) + g(x) > -L + (M + L) = M,$$

provando que $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \infty$. ■

Para toda esta prova, considere $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.