Solução da 3^a Prova de Análise real

Matemática - 4^o ano - 06/09/2018

---

1. Seja (x_n) uma sequência de números reais de forma que $\lim x_n = a$. Mostre que o conjunto

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \cup \{a\},$$

é compacto.

Solução: Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura arbitrária de X por abertos, isto é, cada A_λ é um conjunto aberto, e $X \subset \cup A_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$. Como $a \in X \subset \cup A_\lambda$, então existe $\lambda_0 \in L$ tal que $a \in A_{\lambda_0}$. Como A_{λ_0} é aberto, existe $\varepsilon > 0$ de forma que

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A_{\lambda_0}.$$

Como $\lim x_n = a$ então para este $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A_{\lambda_0} \qquad \text{para todo} \qquad n > n_0,$$

e então

$$\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, x_{n_0+3}, \cdots\} \cup \{a\} \subset A_{\lambda_0}.$$

Resta analisar $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_0}$. Como $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_0} \in X \subset \cup A_\lambda$, então existem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n_0} \in L$ de forma que

$$x_1 \in A_{\lambda_1}, \quad x_2 \in A_{\lambda_2}, \quad x_3 \in A_{\lambda_3}, \quad \dots, \quad x_{n_0} \in A_{\lambda_{n_0}}.$$

Nestes termos

$$X \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup A_{\lambda_3} \cup \cdots \cup A_{\lambda_{n_0}} \cup A_{\lambda_0}.$$

Portanto de uma cobertura arbitrária de X por abertos conseguimos uma subcobertura finita, mostrando que X é compacto. ■

---

2. Seja $X \subset \mathbb{R}$ arbitrário. Mostre que $int(X) = \overline{(X^C)}^C$.

Solução: Se $intX \neq \emptyset$ então a dupla inclusão dos conjuntos pode ser provada simultaneamente. De fato,

$$\begin{aligned} x \in int(X) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X \\ &\Leftrightarrow \quad \text{existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X^C = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad x \text{ não é ponto aderente de } X^C \\
&\Leftrightarrow \quad x \notin \overline{X^C} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \overline{(X^C)}^C.
\end{aligned}$$

A equivalência anterior prova que os dois conjuntos possuem os mesmos pontos. Se um ponto pertencer a um conjunto obrigatoriamente pertence ao outro e vice-versa. Portanto se um deles for o conjunto vazio, o outro também será, e a igualdade fica provada também para o caso vazio.

Observação: Não é mais necessário, devido ao último comentário, mas se você não se convenceu sobre o conjunto vazio, basta ver que os mesmos passos anteriores podem ser usados. De fato, se $int(X) = \emptyset$ então para mostrar que $\overline{(X^C)}^C = \emptyset$ mostraremos que $\overline{(X^C)} = \mathbb{R}$. Dado $x \in \mathbb{R}$, como $int(X) = \emptyset$ então x não é ponto interior de X. Da (negação da) definição de ponto interior, para todo $\varepsilon > 0$ o conjunto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ não está totalmente contido em X, isto é,

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X^C \neq \emptyset,$$

mostrando que x é ponto aderente de (X^C), e assim $x \in \overline{(X^C)}$. Segue que $\mathbb{R} \subset \overline{(X^C)}$. A inclusão contrária é evidente, isto é, $\overline{(X^C)} \subset \mathbb{R}$. Logo $\overline{(X^C)} = \mathbb{R}$ e portanto $\overline{(X^C)}^C = \emptyset = int(X)$. ■

---

3. Usando as definições de conjunto aberto e de conjunto fechado, mostre que se F é fechado e A é aberto, então $(A - F)$ é aberto.

Solução: Seja $a \in (A - F)$. Então $a \in A$ e $a \notin F$. Como A é aberto então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subset A.$$

Como F é fechado, da definição de conjunto fechado, se $x \in F$ para todo $\eta > 0$, tem-se

$$(x - \eta, x + \eta) \cap F \neq \emptyset,$$

e da negação de conjunto fechado, como $a \notin F$, então existe $\varepsilon_2 > 0$, taal que

$$(a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \cap F = \emptyset,$$

e nestes termos

$$(a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \subset F^C.$$

Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Então

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subset A,$$

e

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2) \subset F^C.$$

Nestes termos temos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (A \cap F^C) = (A-F)$. Resumindo, para qualquer $a \in (A-F)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (A-F)$. Segue que $(A-F)$ é aberto. ■

---

4. Suponha que $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Mostre que se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ então o limite de $f(x)$ não existe quando x tende a a.

Solução: Mostraremos que nenhum número real L cumpre a definição de limite da função f quando $x \to a$. De fato, dado $L \in \mathbb{R}$ arbitrário, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, então para o número $\varepsilon = 1 > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que

$$|f(x)| > L + \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad x \in (X - a) \cap (a - \delta, a + \delta).$$

Nestes termos qualquer que seja $\delta > 0$ o conjunto $(X - a) \cap (a - \delta, a + \delta)$ possui pelo menos um ponto x que satisfaz $|f(x)| > L + \varepsilon > |L| + \varepsilon$ e então para este ponto x

$$|f(x) - L| \geq |f(x)| - |L| > \varepsilon.$$

Segue que, qualquer que seja $L \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ de forma que para qualquer $\delta > 0$ existe $x \in (X - a) \cap (a - \delta, a + \delta)$ que satisfaz $|f(x) - L| > \varepsilon$. Isto prova que nenhum número real L pode ser o limite de f quando $x \to a$. ■

---

5. Considere $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $m, n \in \mathbb{R}$ com $m \neq 0$, então mostre que existe o limite $\lim\limits_{x\to a} mx + n$.

Solução: Mostraremos que o limite existe e é precisamente $ma + n$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|} > 0$. Nestes termos sempre que $x \in X$ satisfizer $0 < |x - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{|m|}$ tem-se

$$|(mx + n) - (ma + n)| = |m(x - a)| = |m||x - a| < |m|\delta = |m|\frac{\varepsilon}{|m|} = \varepsilon,$$

mostrando que $\lim\limits_{x\to a} mx + n = ma + n$. ■

---

6. Suponha que $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, com $M \neq 0$, então mostre que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Solução: Para provar que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Para o número $\frac{|M|}{2} > 0$ existe $\delta_1 > 0$ de forma que

$$|g(x) - M| < \frac{|M|}{2} \qquad \text{sempre que} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_1, a + \delta_1),$$

donde,

$$||g(x)| - |M|| \leq |g(x) - M| < \frac{|M|}{2} \qquad \text{sempre que} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_1, a + \delta_1),$$

isto é,

$$\frac{|M|}{2} = |M| - \frac{|M|}{2} < |g(x)| < \frac{|M|}{2} + |M| = \frac{3|M|}{2},$$

sempre que $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_1, a + \delta_1)$.

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então para o número $\frac{|M|\varepsilon}{4} > 0$ existe δ_2 de forma que

$$|f(x) - L| < \frac{|M|\varepsilon}{4} \qquad \text{sempre que} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_2, a + \delta_2).$$

Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, então para o número $\frac{M^2\varepsilon}{4(|L|+1)} > 0$ existe δ_3 de forma que

$$|g(x) - M| < \frac{M^2\varepsilon}{4(|L|+1)} \qquad \text{sempre que} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta_3, a + \delta_3).$$

Então tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$, temos que se $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$, então

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} \right| &= \left| \frac{Mf(x) - Lg(x)}{Mg(x)} \right| \\
&= \left| \frac{Mf(x) - LM + LM - Lg(x)}{Mg(x)} \right| \\
&= \frac{|Mf(x) - LM + LM - Lg(x)|}{|M||g(x)|} \\
&< \frac{2|Mf(x) - LM + LM - Lg(x)|}{M^2} \\
&\leq \frac{2}{M^2}|Mf(x) - ML| + \frac{2}{M^2}|LM - Lg(x)| \\
&= \frac{2}{|M|}|f(x) - L| + \frac{2|L|}{M^2}|M - g(x)| \\
&< \frac{2}{|M|}\frac{|M|\varepsilon}{4} + \frac{2|L|}{M^2}\frac{M^2\varepsilon}{4(|L|+1)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{|L|}{(|L|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$. ■