Solução da 3^a Prova de Análise Real

Matemática - 4^o ano - 11/03/2024

---

1. Sejam A e F subconjuntos de $\mathbb{R}$ com A aberto e F fechado. Usando as definições de ponto interior e de ponto aderente em pelo menos um dos itens, mostre que

$i)$ $A - F = \{x; \quad x \in A \quad \text{e} \quad x \notin F\}$ é aberto.

$ii)$ $F - A = \{x; \quad x \in F \quad \text{e} \quad x \notin A\}$ é fechado.

Solução: (i) **Modo 1: (Usando definições)** Seja $x \in A - F$. Então $x \in A = int(A)$ e $x \notin F = \overline{F}$. Da definição de ponto interior existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A$, e da (negação da) definição de ponto aderente existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \cap F = \emptyset$, donde temos que $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset F^C$.

Tomando $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, então

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A,$$

e também

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset F^C.$$

Nestes termos existe $\varepsilon > 0$ de forma que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (A \cap F^C) = (A - F)$. Isto prova que $x \in int(A - F)$, e que $(A - F)$ é aberto.

(i) **Modo 2: (Variação no Modo 1)** Na solução anterior, podemos substituir a expressão $x \notin F = \overline{F}$ por $x \in F^C = int(F^C)$ já que F^C é aberto. Neste caso, da definição de ponto interior, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset F^C$. E a demonstração do Modo 1 continua normalmente.

(i) **Modo 3: (Usando resultados)** Como F é fechado, então F^C é aberto. Então $A \cap F^C$ é aberto e portanto $A - F = A \cap F^C$ é aberto.

(i) **Modo 4: (Variante do Modo 3)** Como A é aberto, então A^C é fechado. Então $(A - F)^C = A^C \cup F$ é fechado, donde $(A - F)$ é aberto.

(ii) **Modo 1: (Usando definições)** Para provar que $\overline{F - A} \subset F - A$, procederemos contrapositivamente, e para isso, seja $x \notin F - A$. Então é obrigatório que $x \notin F = \overline{F}$ ou $x \in A = int(A)$.

Se $x \notin \overline{F}$, da (negação da) definição de ponto aderente, existe $\varepsilon, > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap F = \emptyset$, e como $F - A \subset F$, então $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (F - A) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap F = \emptyset$, mostrando que $x \notin \overline{F - A}$.

Se por outro lado, $x \in int(A)$, da definição de ponto interior, existe $\varepsilon > 0$ de forma que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$, ou equivalentemente, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A^C = \emptyset$. Neste caso, como $F - A = F \cap A^C = A^C \cap F$, segue que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (F - A) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap (A^C \cap F) = \big[(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A^C\big] \cap F = \emptyset$, mostrando que $x \notin \overline{F - A}$.

Segue pela contrapositiva equivalente que $\overline{F-A} \subset F-A$ e portanto $F-A$ é um conjunto fechado.

(ii) **Modo 2: (Variante no Modo 1)** Na solução anterior, podemos substituir a expressão $x \notin F = \overline{F}$ por $x \in F^C = int(F^C)$ já que F^C é aberto. Portanto no caso de $x \notin \overline{F}$ podemos proceder alternativamente com $x \in F^C = int(F^C)$. Da definição de ponto interior, segue que existe $\varepsilon > 0$ de forma que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset F^C$ o que garante que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap F = \emptyset$. A continuação é a mesma feita anteriormente.

(ii) **Modo 3: (Usando resultados)** Como A é aberto, então A^C é fechado. Então $F \cap A^C$ é fechado e portanto $F - A = F \cap A^C$ é fechado.

(ii) **Modo 4: (Variante do Modo 3)** Como F é fechado, então F^C é aberto. Então $(F-A)^C = F^C \cup A$ é aberto, donde $F-A$ é fechado. ■

---

2. Sejam $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado, e $w \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $w + F = \{w + b; b \in F\}$ é fechado.

Solução: Para provar que $w+F$ é fechado, basta provar a inclusão $\overline{w+F} \subset w+F$, e para isso, seja $x \in \overline{w+F}$.

Para provar que $x \in w+F$, vamos provar que $x - w \in F$ e, como F é fechado, podemos provar que $x - w \in \overline{F}$ em virtude da inclusão $\overline{F} \subset F$. Seja então $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Para este ε, como $x \in \overline{w+F}$, da definição de ponto aderente, temos que

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (w+F) \neq \emptyset.$$

Seja então $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (w+F)$. Então $y \in w+F$ e $y = w+b$ para algum $b \in F$. Mas desta forma,

$$x - \varepsilon < y < x + \varepsilon,$$

donde

$$(x-w) - \varepsilon < y - w < (x-w) + \varepsilon,$$

ou ainda

$$(x-w) - \varepsilon < b < (x-w) + \varepsilon,$$

provando que $b \in ((x-w)-\varepsilon, (x-w)+\varepsilon)$. Como também $b \in F$, segue que $((x-w)-\varepsilon, (x-w)+\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Isto prova que $(x-w) \in \overline{F} \subset F$.

Segue que $x = w + (x-w) \in w+F$, o que prova a inclusão desejada e que $w+F$ é um conjunto fechado. ■

---

3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Mostre que se X é aberto então X é não enumerável.

Solução: Como X é não vazio, então existe pelo menos um $x \in X$. Como X é aberto, então existe também um $\varepsilon > 0$ de forma que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset X$. Como $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ é um intervalo da reta, então $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ é obrigatoriamente não enumerável. Mas se X fosse enumerável, qualquer subconjunto de X seria também enumerável. Como o intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ é não enumerável, então X é não enumerável. ■

---

4. Sejam $m, n \in \mathbb{R}$ dois números reais fixados. Usando a definição de limite mostre que $\lim_{x\to a} mx+n = ma+n$.

Solução: Para mostrar que $\lim_{x\to a} mx+n = ma+n$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{|m|+1}$. Então para todo $x \in X - \{a\}$ com $|x-a| < \delta$, temos que

$$|(mx+n)-(ma+n)| = |m(x-a)| = |m||x-a| < |m|\delta = |m|\frac{\varepsilon}{|m|+1} = \frac{|m|}{|m|+1}\varepsilon < \varepsilon.$$

Segue que $\lim_{x\to a} mx+n = ma+n$. ■

---

5. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então mostre que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$.

Solução: Para provar que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário.

Como $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então g é uma função limitada em uma vizinhança de a. Isto é, existem $C \in \mathbb{R}$ com $C > 0$, e $\delta_1 > 0$ de forma que

$$|g(x)| < C \qquad \text{para todo} \qquad x \in X \cap (a-\delta_1, a+\delta_1).$$

Também como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então para o número $\frac{\varepsilon}{2C} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ de forma que

$$|f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{2C} \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta_2, a+\delta_2).$$

Ainda da hipótese $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então para o número $\frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} > 0$, existe $\delta_3 > 0$ de forma que

$$|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} \qquad \text{para todo} \qquad x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta_3, a+\delta_3).$$

Tomando então $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$, para qualquer $x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)$, temos que

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &\leq |g(x)||f(x)-L| + |L||g(x)-M| \\ &< C|f(x)-L| + |L||g(x)-M| \end{aligned}$$

$$< C\frac{\varepsilon}{2C} + |L|\frac{\varepsilon}{2(|L|+1)} \qquad = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{|L|}{|L|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Segue da definição de limite que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LM$. ■

---

6. Considere o Critério das Sequências para o limite de funções:

> Existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$, se e somente se, para toda sequência (x_n) com $x_n \in (X - \{a\})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$, existe o limite $\lim f(x_n)$.

Estabeleça a negação deste critério e use esta negação para mostrar que não existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ para a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \end{aligned}$$

qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

Solução: Assim sendo, o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe, se e somente se, existir uma sequência (x_n) com $x_n \in (X - \{a\})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$, de forma que não existe o limite $\lim_{x\to a} f(x_n)$.

Vamos usar agora este princípio para mostrar que não existe o limite da função f dada, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. Vamos construir uma sequência (x_n) com $x_n \in (X - \{a\})$, $\lim x_n = a$ e no entanto $\lim f(x_n)$ não existe.

Seja $a \in \mathbb{R}$ arbitrário. Para cada $n \in \mathbb{N}$, com $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, o intervalo $(a, a+\varepsilon) = (a, a+\frac{1}{n})$ possui obrigatoriamente pelo menos um número racional e pelo menos um número irracional. Se n é par, escolhemos $x_n \in (a, a+\frac{1}{n})$ de forma que x_n é racional. Se n é ímpar, escolhemos $x_n \in (a, a+\frac{1}{n})$ de forma que x_n é irracional.

Nestes termos, $f(x_{2n}) = 1$ e $f(x_{2n+1}) = -1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e desta forma a sequência $f(x_n)$ não converge.

Construímos portanto uma sequência (x_n) de pontos de $(X - \{a\})$ satisfazendo $\lim x_n = a$ e no entanto não existe $\lim f(x_n)$. Segue do Critério das Sequências para o limite de funções que não existe o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$. ■

Para toda esta prova, considere $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.