

3ª Prova de Análise Real

Matemática - 4º ano - 09/05/2023

Nome: _____

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: _____

Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

1. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto, e $a \in \mathbb{R}$. Mostre que o conjunto $a + X = \{a + x; \quad x \in X\}$ é aberto.

2. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto arbitrário. Mostre que:

i) $\overline{X^C} = \text{int}(X^C)$.

ii) $\overline{X^C} = (\text{int}(X))^C$.

3. Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto e $F \subset \mathbb{R}$ é fechado então mostre que $(K \cap F)$ é compacto.

4. **(Teorema do confronto)** Sejam $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ três funções e $a \in X'$, satisfazendo

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

para todo $x \in X$. Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

então mostre que $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$.

5. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, mostre que L é ponto aderente do conjunto $\text{Im}(f) = f(X)$.

6. Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com $f(x) > 0$ para todo $x \in X$ e $a \in X'$. Mostre que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ se e somente se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.