3^a Prova de Análise Real

Matemática - 4^o ano - 09/06/2022

Nome: ____

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: __________
Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

---

1. Considere A e F, subconjuntos de $\mathbb{R}$, de forma que A é aberto e F é fechado. Mostre que $F - A$ é fechado e que $A - F$ é aberto. Em pelo menos um dos itens deve-se usar obrigatoriamente a definição de conjunto aberto e de conjunto fechado.

---

2. Mostre que $int(X) \subset X'$ qualquer que seja $X \subset \mathbb{R}$. Dito de outra forma, todo ponto interior de X é ponto de acumulação de X.

---

3. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $a \in X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ então mostre que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$. Dê um contra-exemplo para mostrar que o recíproco não é necessariamente verdadeiro, isto é, se $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$ não necessariamente se tem $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

---

4. **(Teorema do confronto)** Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e $a \in X'$. Suponha que $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ são funções que satisfazem

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

para todo $x \in X$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, então mostre que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

---

5. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $a \in X'$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então mostre que L é ponto aderente do conjunto $Im(f)$.

---

6. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $a \in X'$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções. Se f é limitada em uma vizinhança de a, e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, então mostre que

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \infty.$$

Para toda esta prova, considere $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.