

3ª Prova de Análise real
Matemática - 4º ano - 06/09/2018

Nome: _____

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: _____
Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

1. Seja (x_n) uma sequência de números reais de forma que $\lim x_n = a$. Mostre que o conjunto

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \cup \{a\},$$

é compacto.

2. Seja $X \subset \mathbb{R}$ arbitrário. Mostre que $\text{int}(X) = \overline{(X^c)^c}$.

3. Usando as definições de conjunto aberto e de conjunto fechado, mostre que se F é fechado e A é aberto, então $(A - F)$ é aberto.

4. Suponha que $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Mostre que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ então o limite de $f(x)$ não existe quando x tende a a .

5. Considere $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $m, n \in \mathbb{R}$ com $m \neq 0$, então mostre que existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} mx + n$.

6. Suponha que $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, com $M \neq 0$, então mostre que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$