11^a lista de exercícios de Análise Real

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx = 0$;

ii) Se f é contínua em um ponto c, então $f(c) = 0$;

iii) $X = \{x \in [a, b]; \quad f(x) \neq 0\}$ tem interior vazio.

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f não é identicamente nula, então

$$\int_a^b |f(x)|dx > 0.$$

3. Dê exemplo de uma função integrável que seja descontínua em um conjunto infinito.

4. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas com $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Defina $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ g(x) & \text{se} \quad x \in [a, b] - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que

$$\underline{\int_a^b} \varphi(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} \varphi(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Conclua que φ é integrável se e somente se $f = g$.

5. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, $\varphi : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to [a, b]$ derivável e $c \in [a, b]$. Prove que as afirmações a seguir são equivalentes:

i) $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$ para todo $t \in [a, b]$ e $\varphi(t_0) = c$;

ii) $\varphi(t) = c + \displaystyle\int_{t_0}^t f(\varphi(s))ds$ para todo $t \in [a, b]$.

6. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, e $m = \frac{a+b}{2}$, então prove que

$$f(a) + f(b) = \frac{2}{b - a} \int_a^b f(x) + (x - m)f'(x)dx.$$

7. Sejam $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínuas e $K > 0$ tal que $\left| \displaystyle\int_c^d f(x)dx \right| \leq K$ para quaisquer $c, d \in [a, +\infty)$. Se g possui derivada contínua e g é decrescente, com $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ prove que existe o limite

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)g(x)dx.$$

8. Dadas $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ defina as funções $(f \wedge g)$ e $(f \vee g)$ ponto $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ e $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que f e g são integráveis se e somente se $(f \wedge g)$ e $(f \vee g)$ são integráveis.

9. Prove que se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas, então

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

10. Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta : I \to [a,b]$ deriváveis. Defina $F : I \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$$

para todo $x \in I$. Mostre que F é derivável em I e além disso

$$F'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$. Prove que $f(x) = a^x$ para algum $a > 0$ ou $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.