10^a Lista de Exercícios de Análise Real

1. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X \cap X'$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis em a. Então são também deriváveis em a as funções $(f+g)$, (αf) qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, (fg) e $\frac{f}{g}$ desde que $g(a) \neq 0$, e além disso,

i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

ii) $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$,

iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

iv) $(\frac{f}{g})'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(f(a))^2}$.

2. Sejam $f, g, k : X \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq g(x) \leq k(x)$ para todo $x \in X$. Se em um ponto $a \in X \cap X'$ tem-se que $f(a) = k(a)$ e existem $f'(a) = k'(a)$ então $g'(a)$ existe e além disso, $g'(a) = f'(a) = k'(a)$.

3. Seja $a \in X$ um ponto de máximo local para a função $f : X \to \mathbb{R}$. Mostre que se f possui derivada à direita em a então $f'_+(a) \leq 0$. Mostre que se f possui derivada à esquerda em a então $f'_-(a) \geq 0$.

4. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial. Mostre que se a é raíz de multiplicidade n de p então a é raiz de $p^{(n-1)}$, isto é, da derivada de ordem $n-1$ de p.

5. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $a \in X \cap X'$, defina $g : X \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{se} \quad x \neq a \\ L & \text{se} \quad x = a. \end{cases}$$

Mostre que g é contínua se, e somente se, existe $f'(a)$ e $f'(a) = L$.

6. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em um intervalo I. Mostre que entre duas raízes consecutivas de f' existe no máximo uma raiz de f.

7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se $f'(a) = f'(b)$ então mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c)$. Faça a interpretação geométrica.
Sugestão: Considere primeiro o caso em que $f'(a) = f'(b) = 0$ e mostre que a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se $x \neq a$ e $g(a) = 0$, atinge seu máximo ou seu mínimo em um ponto $c \in (a, b)$. Para o caso geral, considere a função auxiliar $g(x) = f(x) - xf'(a)$.

8. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas e deriváveis no intervalo (a, b). Então existe $c \in (a, b)$ tal que $(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c)$.
Sugestão: Use o teorema do valor médio na função $\varphi(x) = (g(b) - g(a))\, f(x) - (f(b) - f(a))\, g(x)$.

9. Seja f uma função ímpar e derivável em toda a reta real. Mostre que para qualquer $b \in \mathbb{R}$ existe um número $c \in (-b, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)}{b}$.

10. Seja $f : [a, a + h] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em $(a, a + h)$. Mostre que existe $t \in (0, 1)$ de forma que

$$f(a + h) = f(a) + f'(a + th) \cdot h.$$

11. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em um intervalo I. Mostre que f satisfaz a condição de Lipschitz $|f(y) - f(x)| \leq k|y - x|$ para quaisquer $x, y \in I$ (e k uma constante positiva), se e somente se, $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$.

12. Seja f uma função contínua em $I = [a, b]$ e derivável em todo $x \in (a, b)$ de forma que $|f'(x)| \leq k < 1$ para qualquer $x \in (a, b)$. Mostre que a função φ definida em I por $\varphi(x) = x + kf(x)$ é injetora.
Sugestão: Use o exercício anterior.

13. Se f e g são funções definidas em toda a reta real, que satisfazem

$$g(x) = xf(x) + 1, \qquad g(x + y) = g(x)g(y) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 1,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, então mostre que g é derivável em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e além disso, $g'(x) = g(x)$.

14. Seja f uma função definida em um intervalo $I = (a, b)$. Mostre que f é diferenciável (derivável) em um ponto $c \in I$, se e somente se, existe uma função φ, contínua em c, tal que

$$f(x) = f(c) + \varphi(x)(x - c),$$

para todo $x \in I$.

15. Seja f uma função definida em um intervalo $I = (a, b)$. Mostre que f é diferenciável em um ponto $c \in I$, se e somente se, existem uma constante L e uma função r, definida nas proximidades de 0, que satisfazem

$$f(c + h) = f(c) + Lh + r(h), \qquad \text{com} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

16. (Versão simplificada da regra de L'Hospital) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções deriváveis com derivadas contínuas em $c \in (a, b)$. Se $f(c) = g(c) = 0$ com $g'(c) \neq 0$ então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

17. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I. Se existe $\alpha > 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha}$ para quaisquer $x, y \in I$, então f é derivável e possui derivada nula em todos os pontos $c \in I$.

18. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $\mathbb{R}$. Suponha que f satisfaz $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todos $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(x) = f'(0)x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

19. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo I, e duas vezes derivável em um ponto $a \in int(I)$. Mostre que

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a)}{h^2},$$

e também

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2}.$$

20. Uma função f é dita convexa em um intervalo $I = [a, b]$ se para quaisquer $t \in [0, 1]$ e $x, y \in I$,

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$

Seja f uma função definida em $I = [a, b]$ e derivável em (a, b). Mostre que se f é convexa então $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$ para quaisquer $x, y \in (a, b)$.

21. Seja f uma função contínua e derivável em $I = [a, b]$, de forma que $f''(x)$ existe em todo $x \in (a, b)$. Mostre que f é convexa em $[a, b]$, se e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.