9^a Lista de Exercícios de Análise Real

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $Z_f = \{x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = 0\}$ é fechado. Conclua que se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas então $C = \{x \in \mathbb{R}; \quad f(x) = g(x)\}$ é um conjunto fechado.

2. Dadas $f, g : X \to \mathbb{R}$, defina as funções $f \vee g : X \to \mathbb{R}$ e $f \wedge g : X \to \mathbb{R}$ para cada $x \in X$, por $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Mostre que se f e g são contínuas em um ponto $a \in X$ então $(f \vee g)$ e $(f \wedge g)$ também são contínuas em a.

3. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ definida em um aberto $A \subset \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $c \in \mathbb{R}$, os conjuntos $E[f < c] = \{x \in A; \quad f(x) < c\}$ e $E[f > c] = \{x \in A; \quad f(x) > c\}$ são abertos.

4. Uma função $f : F \to \mathbb{R}$ definida em um fechado $F \subset \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $c \in \mathbb{R}$, os conjuntos $E[f \leq c] = \{x \in A; \quad f(x) \leq c\}$ e $E[f \geq c] = \{x \in A; \quad f(x) \geq c\}$ são fechados.

5. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se e somente se $f^{-1}(A)$ é aberto para qualquer aberto $A \subset \mathbb{R}$.

6. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se e somente se $f^{-1}(F)$ é fechado para qualquer fechado $F \subset \mathbb{R}$.

7. Dado um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ não vazio, defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \inf\{|x - s|; \quad s \in S\}$. Prove que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Conclua que f é (uniformemente) contínua.

8. Construa uma bijeção $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que seja descontínua em todo ponto $a \in \mathbb{R}$.

9. (**Teorema de ponto fixo de Brouwer**) Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Prove que f possui um ponto fixo, isto é, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$.

10. Se $f, g : X \to \mathbb{R}$ são uniformemente contínuas então $f + g$ é uniformemente contínua.