8^a Lista de exercícios de Análise Real

1. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, se e somente se $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - L) = 0$.

2. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então mostre que

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M$;

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = LM$;

iii) $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = cL$ qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$;

iv) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ desde que $M \neq 0$.

3. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$, então mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

4. (Teorema do confronto) Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ funções e $a \in X'$. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X - \{a\}$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, mostre que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

5. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ com $L < M$, então mostre que existe $\delta > 0$ de forma que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (X - \{a\})$.

6. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ com $L > 0$, então mostre que existe $\delta > 0$ de forma que $f(x) > 0$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X-\{a\})$.

7. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in X'$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada, mostre que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$ (Mesmo que não exista o limite de g).

8. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $a \in X'$.

i) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ então mostre que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$;

ii) Mostre que o recíproco não é necessariamente verdadeiro, isto é, dê um exemplo em que $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$ mas não necessariamente $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$;

iii) Mostre que o recíproco é verdadeiro para $L = 0$, isto é, se $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

9. (Limite da composta) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ duas funções com $f(X) \subset Y$, $a \in X'$ e $b \in Y \cap Y'$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{y \to b} g(x) = L = g(b)$, então mostre que $\lim_{x \to a} g(f(x)) = L$.

10. Estabeleça a negação do Critério de Cauchy para limite de funções. Use esta negação para mostrar que não existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ para a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \end{aligned}$$

qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.