8^a Lista de Exercícios de Análise Real

1. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = M,$$

então mostre que:

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = L + M$;

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = LM$;

iii) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ desde que $M \neq 0$;

iv) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = kL$ qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.

2. Considerando agora $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto ilimitado superiormente, repita o exercício anterior substituindo $x \to a$ por $x \to \infty$. Novamente, considerando $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto ilimitado inferiormente, repita o exercício anterior substituindo $x \to a$ por $x \to -\infty$.

3. Suponha que $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

então mostre que:

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = \infty$;

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \infty$;

iii) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad k > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad k < 0 \end{cases}.$

Dê contra exemplos que comprovem que não se pode afirmar nada sobre $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

4. Suponha que $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = -\infty,$$

então mostre que:

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty$;

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \infty$;

iii) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se} \quad k > 0 \\ \infty & \text{se} \quad k < 0 \end{cases}.$

5. Suponha que $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

então mostre que:

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = \infty$;

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad L > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad L < 0 \end{cases}$;

iii) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Dê contra exemplos que comprovem que não se pode afirmar nada sobre $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ no caso em que $L = 0$.

6. Escreva a definição formal das expressões

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$