

2ª Lista de exercícios de Análise Real

1. Se  $L$  é um conjunto (não vazio) de índices, e  $A_\lambda \subset X$ , para todo  $\lambda \in L$ , prove que

a)  $(\cup A_\lambda)^C = \cap (A_\lambda)^C$

b)  $(\cap A_\lambda)^C = \cup (A_\lambda)^C$

2. Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função,  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  uma família de subconjuntos de  $X$  e  $(B_\mu)_{\mu \in M}$  uma família de subconjuntos de  $Y$ . Mostre que

a)  $f(\cup A_\lambda) = \cup f(A_\lambda)$

b)  $f(\cap A_\lambda) \subset \cap f(A_\lambda)$

c)  $f^{-1}(\cup B_\mu) = \cup f^{-1}(B_\mu)$

d)  $f^{-1}(\cap B_\mu) = \cap f^{-1}(B_\mu)$

3. Seja  $(A_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$  uma família de subconjuntos de  $X$  com índices em  $L = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Prove (ou dê contra-exemplos) que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left( \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_{ij} \right) = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{ij} \right).$$

4. Seja  $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  uma função que satisfaz:

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad f(B) \subset f(A) \quad \text{e} \quad f(f(A)) = A,$$

para quaisquer  $A, B \subset X$ . Se  $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$  é uma família de subconjuntos de  $X$  então mostre que  $f(\cup A_\lambda) = \cap f(A_\lambda)$  e também  $f(\cap A_\lambda) = \cup f(A_\lambda)$ .