Atividade APCC de Análise Real - Ano letivo 2022

1. (Continuidade por conjuntos abertos) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto. Uma função $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ é contínua, se e somente se, $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto qualquer que seja o aberto $V \subset Y$.

2. (Generalização do TVM para integrais) Sejam f e g funções contínuas em $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Se g não possuir mudança de sinal em $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$, tal que

$$\int_a^b (fg)(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt.$$

Mostre que o clássico TVM para integrais:

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $c \in [a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b - a).$$

é um caso particular do Teorema anterior.

3. Seja f uma função integrável em $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e $t \in [a, b]$. O operador integral de f em $[a, b]$ é denotado por $(Jf)(t)$ ou $J(f(t))$. Isto é,

$$(Jf)(t) = \int_a^t f(s)ds.$$

Isto posto, se $(Jf)(t)$ for integrável, para $t, s \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ temos

$$(J(Jf))(t) = \int_a^t (Jf)(s)ds = \int_a^t \int_a^s f(w)dwds.$$

Quando tal fato ocorre denotamos $(J(Jf)(t)$ por $(J^{(2)}f)(t)$ e dizemos que a integral é de ordem 2 (Não é a integral dupla do Cálculo II, mas sim, a integral segunda de uma função f de uma variável).

Teorema (de Cauchy para integrais repetidas): Mostre que se f é uma função integrável n vezes em $[a, b] \subset \mathbb{R}$, então

$$(J^{(n)}f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - s)^{n-1} f(s)ds,$$

para todo $t \in [a, b]$ e qualquer que seja $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função n vezes integrável em $[a, b]$. Se $(J^{(n)}f)(t)$ é n vezes derivável em $[a, b]$, então

$$\frac{d^n}{dt^n}(J^{(n)}f)(t) = f(t).$$