Solução da 3^a Prova de Álgebra

Matemática - 3° ano - 09/12/2024

---

1. Seja $(G, *)$ um grupo. Mostre que

$$\frac{G}{\{e_G\}} \approx G, \qquad \text{e que} \qquad \frac{G}{G} \approx \{e_G\}.$$

Solução: Para a primeira parte, considere φ a aplicação identidade de G em G, isto é,

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto \varphi(x) = x \end{aligned}$$

Claramente φ é homomorfismo, pois dados $x, y \in G$, $\varphi(x * y) = x * y = \varphi(x) * \varphi(y)$. Segue imediatamente do Teorema Fundamental do Homomorfismo que

$$\frac{G}{Ker(\varphi)} \approx Im(\varphi).$$

Mas como a aplicação identidade é sobrejetora, então $Im(\varphi) = G$, e como a aplicação identidade é injetora, então $Ker(\varphi) = \{e_G\}$. Sendo assim,

$$\frac{G}{\{e_G\}} \approx G.$$

Para a segunda parte, considere η a aplicação identicamente nula de G em G, isto é,

$$\begin{aligned} \eta G &\rightarrow G \\ x &\mapsto \eta(x) = e_G. \end{aligned}$$

Claramente η é homomorfismo, pois dados $x, y \in G$, $\eta(x * y) = e_G = e_G * e_G = \eta(x) * \eta(y)$. É o homomorfismo trivial. Segue imediatamente do Teorema Fundamental do Homomorfismo que

$$\frac{G}{Ker(\eta)} \approx Im(\eta).$$

Mas como a aplicação é a aplicação identicamente nula, então $Im(\eta) = \{e_G\}$, e $Ker(\eta) = \{x \in G;\ \eta(x) = e_G\} = G$. Sendo assim,

$$\frac{G}{G} \approx \{e_G\}.$$

■

---

2. Sejam $(G, *)$ e $(H, \circ)$ dois grupos e $\varphi : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Mostre que $Ker(\varphi)$ é um subgrupo normal de G.

Solução: Já sabemos que $Ker(\varphi)$ é subgrupo de G. Para mostrar que este subgrupo é normal, sejam $a \in G$ e $x \in Ker(\varphi)$ arbitrários. Então $\varphi(x) = 0_H$, e assim,

$$\varphi(a * x * a') = \varphi(a) \circ \varphi(x) \circ \varphi(a') = \varphi(a) \circ \varphi(a') = \varphi(a) \circ (\varphi(a))' = 0_H,$$

donde $a * x * a' \in Ker(\varphi)$. Segue da proposição que $Ker(\varphi) \lhd G$. $\blacksquare$

---

3. O conjunto dos inteiros de Gauss é o conjunto $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$. Mostre que o conjunto $\mathbb{Z}[i]$ com a adição e a multiplicação usuais de números complexos

$$(a+bi)+(u+vi) = (a+u)+(b+v)i,$$
$$(a+bi)\cdot(u+vi) = (au-bv)+(av+bu)i,$$

é um anel comutativo com unidade.

Solução: **Modo 1:** A adição é associativa e comutativa. De fato, dados $(a+bi), (u+vi), (x+yi) \in \mathbb{Z}[i]$, temos que $a, b, u, v, x, y \in \mathbb{Z}$, e assim,

$$\begin{aligned}((a+bi)+(u+vi))+(x+yi) &= ((a+u)+(b+v)i)+(x+yi)\\ &= ((a+u)+x)+((b+v)+y)i\\ &= (a+(u+x))+(b+(v+y))i\\ &= (a+bi)+((u+x)+(v+y)i)\\ &= (a+bi)+((u+vi)+(x+yi)),\end{aligned}$$

e também

$$(a+bi)+(u+vi) = (a+u)+(b+v)i = (u+a)+(v+b)i = (u+vi)+(a+bi).$$

O elemento $0+0i$ é o elemento neutro. De fato,

$$(a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi = (0+a)+(0+b)i = (0+0i)+(a+bi),$$

para todo $(a+bi) \in \mathbb{Z}[i]$.

Dado qualquer $(a+bi) \in \mathbb{Z}[i]$, temos que $-(a+bi) = (-a)+(-b)i \in \mathbb{Z}[i]$. De fato,

$$\begin{aligned}(a+bi)+((-a)+(-b)i) &= (a+(-a))+(b+(-b))i\\ &= 0+0i = ((-a)+a)+((-b)+b)i = ((-a)+(-b)i)+(a+bi).\end{aligned}$$

A multiplicação é associativa e distributiva em relação à adição. De fato, para todos $(a+bi), (u+vi), (x+yi) \in \mathbb{Z}[i]$, temos que $a, b, u, v, x, y \in \mathbb{Z}$, e assim,

$$\begin{aligned}((a+bi)\cdot(u+vi))\cdot(x+yi) &= ((au-bv)+(av+bu)i)\cdot(x+yi)\\ &= ((au-bv)x-(av+bu)y)+((au-bv)y+(av+bu)x)\,i\\ &= (aux-bvx-avy-buy)+(auy-bvy+avx+bux)i\\ &= (a(ux-vy)-b(vx+uy))+(b(ux-vy)+a(vx+uy))\,i\\ &= (a+bi)\cdot((ux-vy)+(vx+uy)i)\\ &= (a+bi)\cdot((u+vi)\cdot(x+yi)),\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
(a+bi)\cdot((u+vi)+(x+yi)) &= (a+bi)\cdot((u+x)+(v+y)i)\\
&= (a(u+x)-b(v+y))+(b(u+x)+a(v+y))\,i\\
&= (au+ax-bv-by)+(bu+bx+av+ay)i\\
&= ((au-bv)+(bu+av)i)+((ax-by)+(bx+ay)i)\\
&= ((a+bi)\cdot(u+iv))+((a+bi)\cdot(x+yi))\,.
\end{aligned}$$

Para a segunda distributividade, basta provar a comutatividade da multiplicação. Como

$$(a+bi)\cdot(u+vi)=(au-bv)+(av+bu)i=(ua-vb)+(ub+va)i=(u+vi)\cdot(a+bi).$$

para quaisquer $(a+bi),(u+vi)\in\mathbb{Z}[i]$, então a multiplicação é comutativa e portanto também distributiva pela direita. Segue que $\mathbb{Z}[i]$ é anel.

Modo 2: Como $\mathbb{Z}[i]\subset\mathbb{C}$, então para provar que $\mathbb{Z}[i]$ é um anel, basta provar que $\mathbb{Z}[i]$ é subanel de $\mathbb{C}$. Para isso, sejam $(a+bi),(u+vi)\in\mathbb{Z}[i]$, isto é, $a,b,u,v\in\mathbb{Z}$. Assim

$$(a+bi)-(u+vi)=(a-u)+(b-v)i,$$

e também

$$(a+bi)\cdot(u+vi)=(au-bv)+(av+bu)i,$$

e como $a,b,u,v\in\mathbb{Z}$ então $(a-u),(b-v),(au-bv),(av+bu)\in\mathbb{Z}$, donde $(a+bi)-(u+vi),(a+bi)\cdot(u+vi)\in\mathbb{Z}[i]$. Isto prova que $\mathbb{Z}[i]$ é subanel de $\mathbb{C}$, e portanto um anel. ■

---

4. No anel $(\mathbb{R},+,\cdot)$ verifique se o conjunto $S=\{a+b\sqrt{3};\quad a,b\in\mathbb{Q}\}$ é subanel de $\mathbb{R}$.

Solução: Para provar que S é subanel, sejam $(a+b\sqrt{3}),(x+y\sqrt{3})\in S$ arbitrários, isto é, $a,b,x,y\in\mathbb{Q}$. Precisamos mostrar que $(a+b\sqrt{3})-(x+y\sqrt{3})\in S$ e também $(a+b\sqrt{3})\cdot(x+y\sqrt{3})\in S$.

Como $a,b,x,y\in\mathbb{Q}$, então $(a-x),(b-y)\in\mathbb{Q}$, donde

$$(a+b\sqrt{3})-(x+y\sqrt{3})=(a-x)+(b-y)\sqrt{3}\in S,$$

e também $(ax+3by),(ay+bx)\in\mathbb{Q}$, donde

$$(a+b\sqrt{3})\cdot(x+y\sqrt{3})=(ax+3by)+(ay+bx)\sqrt{3}\in S.$$

Segue que S é subanel de $\mathbb{R}$. ■

---

5. Seja $(A,*,\cdot)$ um anel com unidade. Para cada $a\in A$ invertível, considere a aplicação

$$f_a : A \;\;\rightarrow\;\; A$$

$$x \mapsto f_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$$

Mostre que f_a é um isomorfismo. Se a e b são invertíveis, mostre que $f_a \circ f_b = f_{a \cdot b}$.

Solução: Dados $x, y \in A$, temos que

$$\begin{aligned} f_a(x * y) &= a \cdot (x * y) \cdot a^{-1} \\ &= (a \cdot x * a \cdot y) \cdot a^{-1} \\ &= (a \cdot x \cdot a^{-1}) * (a \cdot y \cdot a^{-1}) = f_a(x) * f_a(y), \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} f_a(x \cdot y) &= a \cdot (x \cdot y) \cdot a^{-1} \\ &= (a \cdot x \cdot 1_A \cdot y \cdot a^{-1}) \\ &= (a \cdot x \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot y \cdot a^{-1}) = f_a(x) \cdot f_a(y), \end{aligned}$$

donde f_a é homomorfismo do anel A em A. Agora, suponha que $x, y \in A$ são tais que $f_a(x) = f_a(y)$. Então $a \cdot x \cdot a^{-1} = a \cdot y \cdot a^{-1}$, e assim,

$$\begin{aligned} x = (a^{-1} \cdot a) \cdot x \cdot (a^{-1} \cdot a) &= a^{-1} \cdot (a \cdot x \cdot a^{-1}) \cdot a \\ &= a^{-1} \cdot (a \cdot y \cdot a^{-1}) \cdot a = (a^{-1} \cdot a) \cdot y \cdot (a^{-1} \cdot a) = y, \end{aligned}$$

e f_a é uma aplicação injetora. Também dado qualquer $y \in A$, temos $x = a^{-1} \cdot y \cdot a \in A$ e também

$$f_a(x) = f_a(a^{-1} \cdot y \cdot a) = a \cdot (a^{-1} \cdot y \cdot a) \cdot a^{-1} = y,$$

e f_a é uma aplicação sobrejetora. Portanto f_a é um isomorfismo de A em A.

Finalmente, sejam $a, b \in A$ elementos invertíveis. Então para cada $x \in A$,

$$\begin{aligned} (f_a \circ f_b)(x) &= f_a(f_b(x)) = f_a(b \cdot x \cdot b^{-1}) \\ &= a \cdot (b \cdot x \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} = (a \cdot b) \cdot x \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) \\ &= (a \cdot b) \cdot x \cdot (a \cdot b)^{-1} = f_{a \cdot b}(x), \end{aligned}$$

donde segue que $f_a \circ f_b = f_{a \cdot b}$. ■

---

6. Sejam $(A, *, \circ)$ um anel com unidade 1_A e S um subanel de A com unidade 1_S. Mostre que se A é anel de integridade então $1_S = 1_A$.

Solução: Supondo que 1_S é a unidade de S então

$$1_S \circ 1_S = 1_S.$$

Mas como $1_S \in S \subset A$ e 1_A é a unidade de A, então segue que

$$1_S \circ 1_A = 1_S.$$

Assim

$$1_S \circ 1_S = 1_S = 1_S \circ 1_A,$$

donde

$$1_S \circ 1_S - 1_S \circ 1_A = 0_A.$$

Segue que

$$1_S \circ (1_S - 1_A) = 0_A,$$

e como A é anel de integridade de $1_S \neq 0_S = 0_A$, então segue que $1_S - 1_A 0_A$ e assim $1_S = 1_A$. ■