3^a Prova de Álgebra

Matemática - 3^o ano - 09/12/2024

Nome: ____________________

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: ________
Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

---

1. Seja $(G, *)$ um grupo. Mostre que

$$\frac{G}{\{e_G\}} \approx G, \qquad \text{e que} \qquad \frac{G}{G} \approx \{e_G\}.$$

---

2. Sejam $(G, *)$ e $(H, \circ)$ dois grupos e $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Mostre que $Ker(\varphi)$ é um subgrupo normal de G.

---

3. O conjunto dos inteiros de Gauss é o conjunto $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi; \quad a, b \in \mathbb{Z}\}$. Mostre que o conjunto $\mathbb{Z}[i]$ com a adição e a multiplicação usuais de números complexos

$$(a + bi) + (u + vi) = (a + u) + (b + v)i,$$
$$(a + bi) \cdot (u + vi) = (au - bv) + (av + bu)i,$$

é um anel comutativo com unidade.

---

4. No anel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ verifique se o conjunto $S = \{a + b\sqrt{3}; \quad a, b \in \mathbb{Q}\}$ é subanel de $\mathbb{R}$.

---

5. Seja $(A, *, \cdot)$ um anel com unidade. Para cada $a \in A$ invertível, considere a aplicação

$$\begin{aligned} f_a : A &\to A \\ x &\mapsto f_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1} \end{aligned}$$

Mostre que f_a é um isomorfismo. Se a e b são invertíveis, mostre que $f_a \circ f_b = f_{a \cdot b}$.

---

6. Sejam $(A, *, \circ)$ um anel com unidade 1_A e S um subanel de A com unidade 1_S. Mostre que se A é anel de integridade então $1_S = 1_A$.