Solução da 2^a Prova de Álgebra

Matemática - 3^o ano - 04/11/2024

---

1. Mostre que o conjunto $(\mathbb{Q} - \{1\})$ é um grupo com a operação $*$ definida por

$$a * b = a + b - ab.$$

Solução: Para facilitar a escrita, vamos representar $(\mathbb{Q} - \{1\})$ por G. Primeiro temos que provar que a operação $*$ é fechada em G. Dados $x, y \in G$, temos claramente que $x + y - xy \in \mathbb{Q}$. Mas temos que provar que $x + y - xy \neq 1$. Claramente

$$\begin{aligned} x + y - xy = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x + y - xy - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)(1-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad y = 1. \end{aligned}$$

Como então $x \neq 1$ e $y \neq 1$ temos que também $x * y = x + y - xy \neq 1$. A operação é assim fechada em G.

Para a associatividade, temos claramente

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y - xy) * z \\ &= (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z \\ &= x + y + z - xy - xz - yz + xyz \\ &= x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \\ &= x * (y + z - yz) = x * (y * z), \end{aligned}$$

para quaisquer $x, y, z \in G$.

É fácil ver que $0 \in G$ satisfaz as condições de elemento neutro. De fato,

$$x * 0 = x + 0 - x \cdot 0 = x \qquad \text{e} \qquad 0 * x = 0 + x - 0 \cdot x = x,$$

para todo $x \in G$. Logo $e_G = 0$.

Dado $x \in G$ arbitrário, basta ver que $y = \frac{-x}{1-x} \in G$ é o elemento simétrico de x. De fato, como $x \neq 1$ então $y \in \mathbb{Q}$ e além disso, $y \neq 1$ pois $-x \neq 1 - x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Logo $y \in G$, e além disso,

$$x * \frac{-x}{1-x} = x + \frac{-x}{1-x} - x\frac{-x}{1-x} = x + (1-x)\frac{-x}{1-x} = x - x = 0 = e_G,$$

e

$$\frac{-x}{1-x} * x = \frac{-x}{1-x} + x - \frac{-x}{1-x}x = (1-x)\frac{-x}{1-x} + x = -x + x = 0 = e_G,$$

o que prova que x é simétrizável sendo $x' = y = \frac{-x}{1-x}$. ∎

---

2. Considerando o grupo $(\mathbb{R}, +)$, dos números reais com a operação de adição, mostre que o subconjunto

$$S = \left\{ \frac{x}{2^n}; \quad x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R},$$

é um subgrupo de $\mathbb{R}$.

Solução: Dados $u, v \in S$ arbitrários, vamos mostrar que $u + v' \in S$. Primeiro, notemos que para qualquer $v \in \mathbb{R}$, temos que $v' = -v$. Assim, dados $u, v \in S$, então $u = \frac{x}{2^m}$ e $v = \frac{y}{2^n}$, para algum $x, y \in \mathbb{Z}$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Então

$$u + v' = u - v = \frac{x}{2^m} - \frac{y}{2^n} = \frac{x2^n - y2^m}{2^{m+n}}.$$

Como $m, n \in \mathbb{N}$ temos que $m + n \in \mathbb{N}$. Além disso, $x2^n - y2^n \in \mathbb{Z}$ e portanto $u + v' = \frac{x2^n + y2^m}{2^{m+n}} \in S$. ■

---

3. Considere o grupo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$ e o subgrupo $H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$. Determine $\frac{G}{H}$.

Solução: Sabemos que

$$\frac{G}{H} = \{\overline{a} + H; \quad \overline{a} \in G\}.$$

Vamos então determinar as classes laterais $\overline{a} + H = \{\overline{a} + \overline{z}; \quad \overline{z} \in H\}$ para todos os elementos $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{12}$. Temos assim

$$\begin{aligned}
\overline{0} + H &= \{\overline{0} + \overline{0}, \overline{0} + \overline{3}, \overline{0} + \overline{6}, \overline{0} + \overline{9}\} = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\} = H,\\
\overline{1} + H &= \{\overline{1} + \overline{0}, \overline{1} + \overline{3}, \overline{1} + \overline{6}, \overline{1} + \overline{9}\} = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{10}\},\\
\overline{2} + H &= \{\overline{2} + \overline{0}, \overline{2} + \overline{3}, \overline{2} + \overline{6}, \overline{2} + \overline{9}\} = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{11}\},\\
\overline{3} + H &= \{\overline{3} + \overline{0}, \overline{3} + \overline{3}, \overline{3} + \overline{6}, \overline{3} + \overline{9}\} = \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{0}\},\\
\overline{4} + H &= \{\overline{4} + \overline{0}, \overline{4} + \overline{3}, \overline{4} + \overline{6}, \overline{4} + \overline{9}\} = \{\overline{4}, \overline{7}, \overline{10}, \overline{1}\},\\
\overline{5} + H &= \{\overline{5} + \overline{0}, \overline{5} + \overline{3}, \overline{5} + \overline{6}, \overline{5} + \overline{9}\} = \{\overline{5}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{2}\},\\
\overline{6} + H &= \{\overline{6} + \overline{0}, \overline{6} + \overline{3}, \overline{6} + \overline{6}, \overline{6} + \overline{9}\} = \{\overline{6}, \overline{9}, \overline{0}, \overline{3}\},\\
\overline{7} + H &= \{\overline{7} + \overline{0}, \overline{7} + \overline{3}, \overline{7} + \overline{6}, \overline{7} + \overline{9}\} = \{\overline{7}, \overline{10}, \overline{1}, \overline{4}\},\\
\overline{8} + H &= \{\overline{8} + \overline{0}, \overline{8} + \overline{3}, \overline{8} + \overline{6}, \overline{8} + \overline{9}\} = \{\overline{8}, \overline{11}, \overline{2}, \overline{5}\},\\
\overline{9} + H &= \{\overline{9} + \overline{0}, \overline{9} + \overline{3}, \overline{9} + \overline{6}, \overline{9} + \overline{9}\} = \{\overline{9}, \overline{0}, \overline{3}, \overline{6}\},\\
\overline{10} + H &= \{\overline{10} + \overline{0}, \overline{10} + \overline{3}, \overline{10} + \overline{6}, \overline{10} + \overline{9}\} = \{\overline{10}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\},\\
\overline{11} + H &= \{\overline{11} + \overline{0}, \overline{11} + \overline{3}, \overline{11} + \overline{6}, \overline{11} + \overline{9}\} = \{\overline{11}, \overline{2}, \overline{5}, \overline{8}\}.
\end{aligned}$$

Tomando então as distintas classes laterais, temos que

$$\frac{G}{H} = \{\overline{0} + H, \overline{1} + H, \overline{2} + H\}.$$

■

---

4. Seja $(G, *)$ um grupo e $c(x, y) = x * y * x' * y'$ o elemento comutador de x e y. Mostre que para quaisquer $x, y, z \in G$ são válidas as seguintes igualdades,

a. Para qualquer $x \in G$, tem-se $c(x, x) = 0_G$,

b. Para quaisquer $x, y \in G$ tem-se $c(x, y) = (c(y, x))'$,

c. G é abeliano, se e somente se, $c(x, y) = 0_G$ para quaisquer $x, y \in G$.

Solução: **a.** Dado $x \in G$ arbitrário, $c(x, x) = x * x * x' * x' = x * 0_G * x' = x * x' = 0_G$.

b. Dados $x, y \in G$ arbitrários, $(c(y, x))' = (y * x * y' * x')' = x * y * x' * y' = c(x, y)$.

c. Suponha primeiramente que G é abeliano. Então,

$$c(x, y) = x * y * x' * y' = y * x * x' * y' = y * 0_G * y' = y * y' = 0_G.$$

Reciprocamente, sejam $x, y \in G$ arbitrários, e que $c(x, y) = 0_G$. Então,

$$\begin{aligned} x * y &= x * y * (x' * x) = x * y * x' * (y' * y) * x \\ &= (x * y * x' * y') * y * x = c(x, y) * (y * x) = 0_G * y * x = y * x, \end{aligned}$$

donde segue que G é abeliano. ■

---

5. Sejam $(G, *)$ um grupo e $a \in G$ um elemento fixado. Mostre que

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto \varphi(x) = a * x * a' \end{aligned}$$

é isomorfismo.

Solução: Primeiro, mostraremos a bijetividade. Dados $x, y \in G$ com $\varphi(x) = \varphi(y)$ temos $a' * x * a = a' * y * a$ e como todo elemento de G é regular, temos que $x = y$ donde φ é injetor. Dado agora $y \in G$, tomamos $x = a * y * a' \in G$ e temos que este x satisfaz

$$\varphi(x) = \varphi(a * y * a') = a' * (a * y * a') * a = y,$$

donde segue a sobrejetividade de φ e a consequente bijetividade.

Agora, mostraremos que φ é homomorfismo. De fato, dados $x, y \in G$, temos

$$\varphi(x * y) = a' * x * y * a = a' * x * a * a' * y * a = \varphi(x) * \varphi(y).$$

Segue que φ é isomorfismo de G em G. ■

---

6. Sejam G e H dois conjuntos não vazios de forma que $(H, \circ)$ é um grupo e que existe uma aplicação bijetora $f : G \to H$. Defina em G a operação

$$x * y = f^{-1}(f(x) \circ f(y)).$$

Mostre que $(G, *)$ é também um grupo.

Solução: Evidentemente $*$ é fechada em G pois dados $x, y \in G$ temos que $f(x), f(y) \in H$ e sendo H um grupo $f(x) \circ f(y) \in H$ e $f^{-1}(f(x) \circ f(y)) \in G$. Agora vamos mostrar que $*$ é associativa. Dados $x, y, z \in G$ arbitrários, observemos que

$$y * z = f^{-1}(f(y) \circ f(z))$$

e também

$$x * y = f^{-1}(f(x) \circ f(y))$$

e com isso temos que

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= f^{-1}(f(x) \circ f(y * z)) \\ &= f^{-1}(f(x) \circ f(f^{-1}(f(y) \circ f(z)))) \\ &= f^{-1}(f(x) \circ (f(y) \circ f(z))) \\ &= f^{-1}((f(x) \circ f(y)) \circ f(z)) \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(f(x) \circ f(y))) \circ f(z)) \\ &= f^{-1}(f(x * y) \circ f(z)) = (x * y) * z. \end{aligned}$$

Mostraremos agora que $f^{-1}(e_H)$ é o elemento neutro de G. Dado qualquer $x \in G$,

$$x * f^{-1}(e_H) = f^{-1}(f(x) \circ f(f^{-1}(e_H))) = f^{-1}(f(x) \circ e_H) = f^{-1}(f(x)) = x,$$

e também

$$f^{-1}(e_H) * x = f^{-1}(f(f^{-1}(e_H)) \circ f(x)) = f^{-1}(e_H \circ f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x,$$

o que mostra que G possui elemento neutro e além disso $e_G = f^{-1}(e_H)$ é este elemento neutro.

Dado arbitrário $x \in G$, vamos provar que x é simetrizável sendo $f^{-1}((f(x))')$ o seu simétrico. De fato,

$$x * f^{-1}((f(x))') = f^{-1}(f(x) \circ f(f^{-1}((f(x))'))) = f^{-1}(f(x) \circ (f(x))') = f^{-1}(e_H) = e_G,$$

e também

$$f^{-1}((f(x))') * x = f^{-1}(f(f^{-1}((f(x))')) \circ f(x)) = f^{-1}((f(x))' \circ f(x)) = f^{-1}(e_H) = e_G,$$

o que mostra x é simetrizável e além disso, $x' = f^{-1}((f(x))')$.

Segue que G é grupo. ■