1^a Prova de Álgebra

Matemática - 3^o ano - 09/09/2024

---

1. Sejam A, B e C conjuntos arbitrários. Mostre as leis de DeMorgan,

a) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$,

b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

Solução: **(a)** Temos que provar a dupla inclusão dos conjuntos.

Primeiro, suponha $x \in A - (B \cap C)$. Então $x \in A$ e $x \notin (B \cap C)$ e portanto $x \notin B$ ou $x \notin C$. Se $x \notin B$, então $x \in (A - B) \subset (A - B) \cup (A - C)$. Se por outro lado $x \notin C$ então $x \in (A - C) \subset (A - B) \cap (A - C)$.

Para a inclusão contrária, suponha $x \in (A - B) \cup (A - C)$. Então $x \in (A - B)$ ou $x \in (A - C)$. Se $x \in (A - B)$ então $x \in A$ e $x \notin B$, donde $x \notin (B \cap C)$ e portanto $x \in A - (B \cap C)$. Se por outro lado $x \in (A - C)$ então $x \in A$ e $x \notin C$ donde $x \notin (B \cap C)$ e $x \in A - (B \cap C)$.

Segue a igualdade desejada.

(b) Mostraremos a dupla inclusão dos conjuntos simultaneamente.

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cup C) &\Leftrightarrow \quad x \in A \quad \text{e} \quad x \notin (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in A \quad \text{e} \quad x \notin B \quad \text{e} \quad x \notin C \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A - B) \quad \text{e} \quad x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (A - B) \cap (A - C). \end{aligned}$$

■

---

2. Seja R uma relação não vazia sobre um conjunto não vazio E. Então mostre que:

i) se R é reflexiva, então R^{-1} é reflexiva;

ii) se R é simétrica, então R^{-1} é simétrica;

iii) se R é antissimétrica, então R^{-1} é antissimétrica;

iv) se R é transitiva, então R^{-1} é transitiva.

Solução: **(i)** Suponha R reflexiva. Para provar que R^{-1} é reflexiva, seja $x \in E$. Como R é reflexiva, então xRx e portanto $xR^{-1}x$, donde R^{-1} é também reflexiva.

(ii) Suponha R simétrica. Para provar que R^{-1} é simétrica, sejam $x, y \in E$ de forma que $xR^{-1}y$. Então yRx e como R é simétrica, então xRy, e disto temos que $yR^{-1}x$.

(iii) Suponha R antissimétrica. Para provar que R^{-1} é antissimétrica, sejam $x, y \in E$ de forma que $xR^{-1}y$ e $yR^{-1}x$. Então yRx e xRy e como R é simétrica, então $x = y$, provando que R^{-1} é antissimétrica.

(iv) Suponha R transitiva. Para provar que R^{-1} é transitiva, sejam $x, y, z \in E$ de forma que $xR^{-1}y$ e $yR^{-1}z$. Então zRy e yRx e sendo R transitiva, temos que zRx. Segue que $xR^{-1}z$ e R^{-1} é transitiva. ■

---

3. Seja E um conjunto não vazio e R uma relação simultaneamente de equivalência e de ordem sobre E. Mostre que $\overline{a} = \{a\}$ para cada $a \in E$.

Solução: Seja R uma relação de equivalência e uma relação de ordem sobre E. Seja $a \in E$ arbitrário. Para mostrar que $\overline{a} = \{a\}$, mostraremos a dupla inclusão dos conjuntos $\overline{a} = \{b \in E; \quad bRa\}$ e $\{a\}$.

Como R é uma relação de equivalência, então R é reflexiva, donde aRa, mostrando que $a \in \overline{a}$ e que $\{a\} \subset \overline{a}$.

Para a inclusão contrária, suponha $x \in \overline{a}$. Então xRa e como R é simétrica temos também aRx. Mas como R é antissimétrica, isto garante que $a = x$. Segue que $x = a \in \{a\}$, mostrando que $\overline{a} \subset \{a\}$. ■

---

4. Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções de X em X. Defina em $\mathcal{F}$ a relação $\approx$ dada por

$$f \approx g \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe} \quad \varphi \in \mathcal{F} \quad \text{invertível, tal que,} \quad f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}.$$

Mostre que $\approx$ é uma relação de equivalência.

Solução: Para mostrar a reflexividade suponha $f \in \mathcal{F}$ uma função arbitrária. Como a função identidade, $Id \in \mathcal{F}$ é invertível, com $Id^{-1} = Id$, temos que

$$f = Id \circ f \circ Id^{-1},$$

e então $f \sim f$.

Para a simetria, sejam $f, g \in \mathcal{F}$ de forma que $f \sim g$. Então da definição da relação, temos que existe uma função φ pertencente a $\mathcal{F}$, invertível que satisfaz

$$f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}.$$

Segue que (aplicando φ^{-1} pela esquerda e φ pela direita),

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = g,$$

e como $\varphi = (\varphi^{-1})^{-1}$, existe portanto uma função invertível, que é precisamente φ^{-1} que satisfaz

$$g = \varphi^{-1} \circ f \circ (\varphi^{-1})^{-1},$$

donde $g \sim f$.

Para a transitividade, sejam $f, g, h \in \mathcal{F}$ de forma que $f \sim g$ e também $g \sim h$. Então existem funções $\varphi, \eta \in \mathcal{F}$ invertíveis de forma que

$$f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \qquad \text{e} \qquad g = \eta \circ h \circ \eta^{-1},$$

e portanto

$$\begin{aligned} f &= \varphi \circ (\eta \circ h \circ \eta^{-1}) \circ \varphi^{-1} \\ &= (\varphi \circ \eta) \circ h \circ (\eta^{-1} \circ \varphi^{-1}) = (\varphi \circ \eta) \circ h \circ (\varphi \circ \eta)^{-1} \end{aligned}$$

Como φ e η são funções de X em X invertíveis, então $\varphi \circ \eta$ é ainda função de X em X invertível. Segue portanto que $f \sim h$. ∎

---

5. Sejam E e F dois conjuntos não vazios e $f : E \to F$ uma aplicação. Suponha que existem aplicações $g, h : F \to E$ tais que $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in E$ e $(f \circ h)(y) = y$ para todo $y \in F$. Mostre que f é bijetora e além disso, $g = h = f^{-1}$.

Solução: Primeiro mostraremos que f é injetora. Sejam então $x, a \in E$ de forma que $f(x) = f(a)$. Como $f(x) = f(a) \in F$ e $g : F \to E$ é uma aplicação então $g(f(x)) = g(f(a))$, e assim, da nossa hipótese,

$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = a,$$

mostrando que f é injetora.

Para a sobrejetividade de f seja $y \in F$. Da nossa hipótese, temos que $f(h(y)) = (f \circ h)(y) = y$ e como $h(y) \in E$, temos que existe $x = h(y) \in E$ de forma que $f(x) = f(h(y)) = y$, mostrando que f é sobrejetora.

Para a igualdade, notemos primeiro que $D(h) = D(g) = D(f^{-1}) = F$ e $Cd(h) = Cd(g) = Cd(f^{-1}) = E$. Também para todo $y \in F$, temos que $h(y) \in E$ e da sobrejetividade de f, existe $x \in E$ de forma que $f(x) = y$ e portanto $x = f^{-1}(y)$. Segue das nossas hipóteses que

$$h(y) = (g \circ f)(h(y)) = g(f(h(y)) = g((h \circ f)(y)) = g(y),$$

donde $g = h$. Também,

$$f^{-1}(y) = x = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y),$$

donde $g = f^{-1}$. Segue que $f^{-1} = g = h$. ∎

---

6. No conjunto $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ defina a operação $* : X \times X \to X$ dada por

$$(a, b) * (x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Mostre que $*$ é associativa, comutativa e admite elemento neutro.

Solução: Para a associatividade, sejam $(a,b),(x,y),(v,w) \in X$ arbitrários. Então

$$\begin{aligned}
(a,b)*((x,y)*(v,w)) &= (a,b)*(xv-yw, xw+yv) \\
&= (a(xv-yw)-b(xw+yv), a(xw+yv)+b(xv-yw)) \\
&= (axv-ayw-bxw-byv, axw+ayv+bxv-byw) \\
&= ((ax-by)v-(ay+bx)w, (ax-by)w+(ay+bx)v) \\
&= (ax-by, ay+bx)*(v,w) \\
&= ((a,b)*(x,y))*(v,w),
\end{aligned}$$

que mostra a associatividade de $*$.

Também,

$$(a,b)*(x,y) = (ax-by, ay+bx) = (xa-yb, xb+ya) = (x,y)*(a,b),$$

donde $*$ é também comutativa.

Para o elemento neutro, queremos mostrar que existe $(x,y) \in X$ de forma que

$$(a,b)*(x,y) = (x,y)*(a,b) = (a,b),$$

para todo $(a,b) \in X$. Da comutatividade de $*$, basta provar uma das igualdades. Queremos então encontrar $(x,y) \in X$ de forma que

$$(ax-by, ay+bx) = (a,b)*(x,y) = (a,b),$$

e portanto, queremos encontrar $x,y \in \mathbb{R}$ de forma que

$$\begin{cases} ax-by=a \\ bx+ay=b. \end{cases}$$

A solução desse sistema de 2 equações lineares a 2 incógnitas é $x=1$ e $y=0$. Segue que $(1,0) \in X$ é o elemento neutro para a operação $*$. $\blacksquare$