

1ª Prova de Álgebra
Matemática - 3º ano - 09/09/2024

Nome: _____

Resolva 5 das 6 questões abaixo, e escreva o número da questão que você não resolveu: _____

Se não marcar nenhuma questão, todas as questões serão corrigidas e terão peso $\frac{100}{6} \approx 16,67$.

1. Sejam A , B e C conjuntos arbitrários. Mostre as leis de DeMorgan,

a) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$,

b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

2. Seja R uma relação não vazia sobre um conjunto não vazio E . Então mostre que:

i) se R é reflexiva, então R^{-1} é reflexiva;

ii) se R é simétrica, então R^{-1} é simétrica;

iii) se R é antissimétrica, então R^{-1} é antissimétrica;

iv) se R é transitiva, então R^{-1} é transitiva.

3. Seja E um conjunto não vazio e R uma relação simultaneamente de equivalência e de ordem sobre E . Mostre que $\bar{a} = \{a\}$ para cada $a \in E$.

4. Seja X um conjunto não vazio e \mathcal{F} o conjunto de todas as funções de X em X . Defina em \mathcal{F} a relação \approx dada por

$$f \approx g \Leftrightarrow \text{existe } \varphi \in \mathcal{F} \text{ invertível, tal que, } f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}.$$

Mostre que \approx é uma relação de equivalência.

5. Sejam E e F dois conjuntos não vazios e $f : E \rightarrow F$ uma aplicação. Suponha que existem aplicações $g, h : F \rightarrow E$ tais que $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in E$ e $(f \circ h)(y) = y$ para todo $y \in F$. Mostre que f é bijetora e além disso, $g = h = f^{-1}$.

6. No conjunto $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ defina a operação $*$: $X \times X \rightarrow X$ dada por

$$(a, b) * (x, y) = (ax - by, ay + bx).$$

Mostre que $*$ é associativa, comutativa e admite elemento neutro.