4^a Lista de exercícios de Álgebra

1. Para cada caso abaixo, verifique se a operação $*$ definida sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é associativa, comutativa, possui elemento neutro. Se possuir elemento neutro, determine também os elementos simetrizáveis.

a) $(a, b) * (c, d) = (ac, 0)$,
b) $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$,
c) $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$,
d) $(a, b) * (c, d) = (a + c, bd)$,
e) $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

2. Seja $*$ a operação sobre $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada pela lei $(a, b, c) * (d, e, f) = (ad, be, cf)$. Prove que $*$ é associativa e tem elemento neutro. Determine os elementos simetrizáveis em $\mathbb{Z}^3$ por esta operação.

3. Verifique se a operação $\circ$ é distributiva com relação a $*$, no caso em que $(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + bc)$ e $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

4. Um subconjunto $A \subset E$ é fechado para a operação $*$ de E se (e somente se) $a * b \in A$ para quaisquer $a, b \in A$. Verifique quais dos subconjuntos de $\mathbb{Z}$ são fechados para a operação de adição, e para a operação de multiplicação.

a) $\mathbb{Z}_+$,
b) $\mathbb{Z}_-$,
c) $P = \{2z; \quad z \in \mathbb{Z}\}$,
d) $I = \{2z + 1; \quad z \in \mathbb{Z}\}$,
e) $m\mathbb{Z} = \{mz; \quad z \in \mathbb{Z}\}$.

5. Mostre que o conjunto $A = \{\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta; \quad \theta \in \mathbb{R}\}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$ fechado para a multiplicação de complexos.

6. Em cada caso, construa uma tabela da operação $*$ definida sobre o conjunto E. Verifique se a operação é comutativa, associativa e se admite elemento neutro.

a) $E = \{1, 2, 3, 6\}$ e $x * y = mdc(x, y)$,
b) $E = \{1, 3, 9, 27\}$ e $x * y = mmc(x, y)$,
c) $E = \mathcal{P}(\{a, b\})$ e $x * y = x \cup y$,
d) $E = \mathcal{P}(\{a, b\})$ e $x * y = x \cap y$,
e) $E = \{1, i, -1, -i\}$ e $x * y = x \cdot y$.

7. Construa uma tabela da operação de composição de funções para o conjunto $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, onde

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Seja E um conjunto no qual está definida uma operação associativa $*$. Mostre que se $a, b \in E$ são elementos regulares para a operação $*$, então $a * b$ e $b * a$ são também regulares para a operação $*$.

9. Dado um conjunto não vazio A, considere o conjunto $\mathcal{T}(A)$ das transformações $f : A \to A$, munido da operação de composição de transformações. Prove a afirmação: Se A possui pelo menos dois elementos distintos, então $\mathcal{T}(A)$ é não comutativo.

10. Uma operação $*$ definida em um conjunto não vazio E é dita totalmente não associativa, se $a * (b * c) \neq (a * b) * c$, para quaisquer $a, b, c \in E$. Mostre que $*$ não é comutativa.

11. Seja $*$ uma operação associativa sobre um conjunto não vazio E que possui elemento neutro $e \in E$. Mostre que todo elemento simetrizável de E é regular para a operação $*$.