2^a Lista de exercícios de Álgebra

1. Sejam R e S duas relações do conjunto E no conjunto F. Então
a. $R^{-1} \cap S^{-1} = (R \cap S)^{-1}$,
b. $R^{-1} \cup S^{-1} = (R \cup S)^{-1}$.

2. Se R é uma relação não vazia sobre um conjunto E, então
i) R é reflexiva, se e somente se, R^{-1} é reflexiva.
ii) R é simétrica, se e somente se, R^{-1} é simétrica.
iii) R é antissimétrica, se e somente se, R^{-1} é antissimétrica.
iv) R é transitiva, se e somente se, R^{-1} é transitiva.

3. Se R e S são duas relações (não vazias) sobre um conjunto E, então
i) Se R e S são reflexivas então, $R \cap S$ também é reflexiva.
ii) Se R e S são simétricas então, $R \cap S$ também é simétrica.
iii) Se R, ou S, é antissimétrica então, $R \cap S$ também é antissimétrica.
iv) Se R e S são transitivas então, $R \cap S$ também é transitiva.

4. Se R e S são duas relações (não vazias) sobre um conjunto E, então
i) Se R ou S são reflexivas então, $R \cup S$ também é,
ii) Se R ou S são simétricas então, $R \cup S$ também é,
Mostre também (dando contraexemplos) que não há garantias que $R \cup S$ seja antissimétrica e transitiva, mesmo se R ou S forem.

5. Considere E o conjunto de todos os vetores em $\mathbb{R}^n$ e a relação $\approx$, definida sobre E, dada por

$$u \approx v \qquad \Leftrightarrow \qquad u = \alpha v \quad \text{para algum} \quad \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Mostre que $\approx$ é uma relação de equivalência em E.

6. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e defina neste conjunto a relação $\sim$ dada por

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 2k\pi \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. Esta relação é conhecida como relação de equivalência trigonométrica, uma vez que, se $x \sim y$, então, $\text{sen}(x) = \text{sen}(y)$ e $\cos(x) = \cos(y)$.

7. Considerando o conjunto $\mathcal{M} = M_n(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem $n \geq 1$, com coeficientes reais, e a relação $\sim$ dada por

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe } P \in \mathcal{M} \text{ invertível, tal que, } A = P \cdot B \cdot P^{-1}.$$

Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência (chamada de relação de semelhança de matrizes).

8. Seja S o conjunto de todas as sequências de números reais, isto é,

$$S = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}; \quad a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Considere a relação $\simeq$, definida em S por,

$$\{a_n\} \simeq \{b_n\} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n \to \infty} |a_n - b_n| = 0.$$

Mostre que $\simeq$ é uma relação de equivalência em S.

9. Suponha R a relação sobre o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais dada por

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que R é uma relação de equivalência. Indique as classes de $\bar{1}$; $\bar{5}$; $\overline{\frac{1}{2}}$ e $\overline{1,3}$.

10. Seja o conjunto $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos. Verifique se as relações R, dadas abaixo, são relações de equivalência em $\mathbb{C}$.

a. zRw se $|z|^2 = |w|^2$.
b. zRw se $z = \bar{w}$.
c. zRw se $Re(z) = Re(w)$, onde $Re(z)$ denota a parte real de z.

11. Considere o conjunto $\mathcal{F} = \mathcal{C}(X, Y)$ das funções contínuas de X em Y. Considere a relação $\simeq$ de homotopia de funções, isto é, $f \simeq g$ se e somente se f é homotópica a g, ou ainda, $f \simeq g$ se e somente se existe uma família de funções contínuas $\varphi : X \times [0,1] \to Y$, de forma que $\varphi(x, 0) = f(x)$ e $\varphi(x, 1) = g(x)$. Mostre que a relação $\simeq$, de homotopia de funções, é uma relação de equivalência.

12. Considerando o conjunto $\mathcal{F} = C([0,1], \mathbb{R})$ das funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$, e a relação $\sim$, definida em $\mathcal{F}$, dada por

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 f(x) - g(x)dx = 0.$$

Verifique que $\sim$ é uma relação de equivalência.

13. Dadas as relações de equivalênica $\sim$ em E e $\approx$ em F, mostre que a relação $\equiv$ dada por

$$(a, b) \equiv (c, d) \qquad \Leftrightarrow \qquad a \sim c \quad \text{e} \quad b \approx d$$

é uma relação de equivalência em $E \times F$.

14. Considerando o conjunto $\mathbb{N}^*$, e a relação $\leq$, definida por

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x|y,$$

mostre que $\leq$ é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{N}^*$. É uma relação de ordem total? Mostre que em $\mathbb{Z}$ esta relação não é uma relação de ordem.

15. Considerando o conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 16, 18, 24, 32, 48\} \subset \mathbb{N}^*$, e a relação $\preceq$ dada por $x \preceq y$ se e somente se $x|y$. Se $A = \{4, 6, 12\}$, determine, se existirem: O conjunto das cotas inferiores e o das cotas superiores, o elemento máximo e o mínimo, o elemento supremo e o ínfimo e o elemento maximal e o minimal de A.

16. Considerando o conjunto $\mathcal{F} = C([0,1], \mathbb{R}$ das funções contínuas definidas no intervalo $[0,1]$, e a relação $\preceq$ dada por

$$f \preceq g \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 g(x)dx.$$

Verifique se $\preceq$ é uma relação de ordem (parcial).