Solução da 1^a Prova de Álgebra Linear

Engenharia Agrícola - 1^o ano - 10/11/2025

---

1. Construir as matrizes $A_{3\times 4} = [a_{ij}]_{3\times 4}$ e $B_{4\times 2} = [b_{ij}]_{4\times 2}$ de forma que

$$a_{ij} = (-1)^i(2i - j) \qquad \text{e} \qquad b_{ij} = i^2 - 2ij.$$

Solução: Com as informações dadas temos que

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1)^1(2\cdot 1 - 1) & (-1)^1(2\cdot 1 - 2) & (-1)^1(2\cdot 1 - 3) & (-1)^1(2\cdot 1 - 4) \\ (-1)^2(2\cdot 2 - 1) & (-1)^2(2\cdot 2 - 2) & (-1)^2(2\cdot 2 - 3) & (-1)^2(2\cdot 2 - 4) \\ (-1)^3(2\cdot 3 - 1) & (-1)^3(2\cdot 3 - 2) & (-1)^3(2\cdot 3 - 3) & (-1)^3(2\cdot 3 - 4) \end{bmatrix}. \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Também

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1 & 1^2 - 2\cdot 1\cdot 2 \\ 2^2 - 2\cdot 2\cdot 1 & 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2 \\ 3^2 - 2\cdot 3\cdot 1 & 3^2 - 2\cdot 3\cdot 2 \\ 4^2 - 2\cdot 4\cdot 1 & 4^2 - 2\cdot 4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -4 \\ 3 & -3 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

---

2. Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

calcule $2A + BC$.

Solução: Temos então

$$A + BC = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

■

---

3. Dê um exemplo de matrizes $A_{3\times 3}$ e $B_{3\times 3}$ de forma que A e B são não nulas mas AB é a matriz nula.

Solução: Os exemplos são muitos, mas uma ideia é trabalhar com matrizes não nulas que contenham algumas linhas ou colunas nulas. Matrizes parecidas com

$$
A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}
$$

são não nulas e satisfazem

$$
AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

para quaisquer valores não simultaneamente nulos de x, y e z e de a, b e c. ■

---

4. Dada a matriz

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},
$$

determine a matriz escalonada reduzida por linhas que é linha equivalente a A.

Solução: Começando com a matriz A fazemos

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}
&\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[L_3 \to (-1)L_3]{L_2 \to (-1)L_2}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que o primeiro elemento não nulo de cada linha (não nula) é igual a 1, e as colunas que possuem este primeiro elemento não nulo de cada linha (não nula) tem os demais elementos iguais a zero. Não existem linhas nulas. ■

---

5. Determine a matriz $\begin{bmatrix} x & a \\ y & b \end{bmatrix}$ que satisfaz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & a \\ y & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: Multiplicando as duas matrizes do primeiro membro temos que

$$\begin{bmatrix} 2x+y & 2a+b \\ x-2y & a-2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e da igualdade de matrizes temos que

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2a+b=0 \\ x-2y=0 \\ a-2b=1 \end{cases}.$$

Temos portando dois sistemas

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2a+b=0 \\ a-2b=1 \end{cases}.$$

Resolvendo estes dois sistemas obtemos $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{1}{5}$, $a = \frac{1}{5}$ e $b = -\frac{2}{5}$. Segue que a matriz procurada é

$$\begin{bmatrix} x & a \\ y & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

■

---

6. Determine a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ x+2y-z=-3 \\ -x-y+z=2 \end{cases}$$

usando a técnica de escalonamento, determinando o posto da matriz ampliada e o posto da matriz dos coeficientes.

Solução: A matriz ampliada do sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Vamos agora escalonar esta matriz. Não precisa ser na forma reduzida por linhas.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \to L_3 + 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Temos portanto o posto da matriz ampliada $p_a = 3$, o posto da matriz dos coeficientes $p_c = 3$ e o número de variáveis $n = 3$. O sistema possui portanto solução e apenas uma solução. Das linhas 2 e 3 da matriz temos $z = 2$ e $y = -1$ e da primeira linha da matriz

$$x + 2y - z = -1,$$

que nos fornece $x - 2 - 2 = -1$ e portanto $x = 3$. ∎