Uma abordagem histórico-matemática do número pi (π)

Bruna Gabriela Wendpap[1], Fernanda De Bastiani[1], Sandro Marcos Guzzo[1]

[1] Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – UNIOESTE – Cascavel - Pr.

E-mail: brunagwendpap@hotmail.com

Resumo. *O número pi (π) representa o quociente entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. O primeiro matemático a investigar o número π foi Archimedes (287-212 a.C.). Uma das importâncias deste número deve-se ao fato da sua presença em várias equações de diferentes campos da ciência. Hoje já se conhecem muitos métodos diferentes para o cálculo do π. O objetivo deste trabalho é apresentar um pouco da história do número π e formas já conhecidas para o cálculo do seu valor aproximado, dando ênfase ao método que utiliza séries de potências.*

Palavras chaves. *Número π, história do π, cálculo do π.*

1. Introdução

Desde antes de Cristo já se conhecia o número pi, que durante 2500 anos, ocupou posição central na história da matemática [1]. A primeira tentativa de calcular o número pi ocorreu por volta de 250 a.C. Matemáticos de algumas épocas tentaram calcular o valor de pi até provarem que é um número irracional. A partir de então métodos têm sido desenvolvidos para o cálculo do valor de pi, representado pela letra grega π, com um número cada vez maior de casas decimais.

2. História do número PI

O número π tem uma história fascinante, que começou acerca de 4000 anos atrás. Antes de mais nada, é importante focar que na história do π, um dos passos fundamentais consistiu em adquirir consciência da constância da razão entre o perímetro e o diâmetro de qualquer círculo, pois sem esta consciência nunca se teria concebido o π. Inúmeros povos andaram à sua procura mesmo antes que chegassem a ter consciência matemática.

No velho testamento (I Reis 7:23) lê-se: "E ele (Salomão) fez também um lago de dez cúbitos, de margem a margem, circular, cinco cúbitos de fundo, e trinta cúbitos em redor". Este mesmo verso aparece também em II Crônicas 4:2. Esta passagem ocorre em uma lista de especificações para o grande templo de Salomão, construído cerca de 950 a.C. A circunferência era, pois, três vezes o diâmetro. Isto significa que os antigos Hebreus se contentavam em atribuir a π o valor 3. Este valor foi muito possivelmente encontrado por medição.

Matemáticos de várias épocas tentaram buscar uma racionalidade para π. No entanto, chegaram a uma incrível descoberta para a época: a existência de números irracionais. A prova de que π é um número irracional foi feita por Johann Lambert, em 1761, e Legendre, em 1794. Além de irracional, π é um número transcendente, o que foi provado por Ferdinand Lindemann em 1882. Isso significa que não existe um polinômio com coeficientes inteiros ou racionais do qual π seja uma raiz. É difícil de calculá-lo porque sendo um número irracional, sua representação decimal não apresenta nenhuma previsibilidade.

Um dos problemas mais intrigantes na antiguidade, era a chamada quadratura do círculo. Este problema consiste em construir (apenas com régua não graduada e compasso) um quadrado de área igual à área de um círculo dado. A primeira menção deste fato é feita por volta do ano 2000 a.C. Isto é o que revela o papiro Rhind, um documento egípcio descoberto em 1855, cujas inscrições indicam a regra um nono:

Se d é o diâmetro de um círculo, então subtraindo-se de d,
um-nono de d, obtemos o lado do quadrado desejado.

Isto significa que

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2,$$

e portanto,

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}1605\,.$$

O primeiro matemático a investigar o número π foi Archimedes (287-212 a.C.). Ele efetivamente calculou uma aproximação para o número π. Em sua época, já era conhecido que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro resultava em uma constante. Archimedes construiu polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência e calculou o perímetro destes polígonos. Quanto mais lados ele colocava no polígono, melhor a aproximação. Usando um polígono regular de 96 lados, Archimedes descobriu que

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

ou seja, $3{,}140845 < \pi < 3{,}142857$. O trabalho de Archimedes não foi melhorado durante dezoito séculos.

Hoje se sabe com bastante precisão o valor do número π. O número π (assim como todos os números irracionais) não pode ser representado por uma fração, em outras palavras, o número π tem infinitas casas decimais que não apresentam comportamento periódico. Uma fração que muito se aproxima do valor de π, com um erro menor que 10^{-6}, é $\frac{355}{113}$.

Vários matemáticos ficaram ocupados, durante algum tempo, em calcular o valor de π com mais precisão do que se conhecia. Isto é, com mais casas decimais. A cada nova tentativa os cálculos se tornavam mais elaborados e extensos.

Depois da construção do primeiro computador, o ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer), o trabalho de calcular π com maior exatidão coloca computadores para trabalhar durante horas ou até dias para calcular mais casas decimais de π. O próprio ENIAC foi usado por Reitwiersner, em 1949 para calcular 2037 casas decimais corretas para π, trabalhando 70 horas. Em setembro de 2002, Yasumasa Kanada atinge a marca de 1,24 trilhão de casas decimais, usando um supercomputador Hitachi SR8000, que trabalhou por 602 horas, no Centro de Informação Tecnológica da Universidade de Tokyo.

3. Importância do PI

A importância de π deve-se também ao fato da sua presença em várias equações de diferentes campos da ciência: descrevendo a hélice dupla do DNA, na teoria das supercordas, nas equações de Einstein do campo gravitacional, na arquitetura e em um grande número de problemas geométricos e estatísticos. O π apresenta-se também na teoria das vibrações e movimentos ondulatórios. Mesmo na arte π tem sido uma fonte de inspiração. Umberto Eco, na primeira página do seu livro "*O Pêndulo de Foucault*", descreve o pêndulo e a associação de π com o período do pêndulo. No filme "π, *faith in chaos*", escrito e dirigido por Darren Aronofsky, um atormentado matemático tenta decifrar um código, baseando-se em dígitos de π, para compreender o padrão do mercado de capitais.

4. Cálculo do PI

O nosso objetivo aqui é apresentar uma maneira de se calcular o número π com a precisão que se desejar. O que será apresentado aqui não é a melhor maneira para se calcular π, mas foi um método usado primitivamente para o cálculo de π. Alguns dos métodos necessitam do conhecimento sobre séries de potências, o leitor interessado pode consultar [2].

A época do Renascimento Europeu trouxe, na altura devida, uma nova concepção da matemática, preocupada em provar as afirmações já feitas, uma matemática mais estruturada. Houve a necessidade de calcular o número π, no caso de irracional, demonstrar este fato. Descobriu-se então a definição não geométrica de π e do papel "não geométrico" deste valor. Assim se chegou à descoberta das representações de π por séries infinitas. Um dos primeiros foi Wallis (1616-1703) com a fórmula,

$$\pi = 2\left(\frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}...\right).$$

Em 1676, Newton usou a série de potências da função arco seno, e obteve:

$$\pi = 6arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n}(n!)^2}\frac{3}{2n+1},$$

que é uma série de convergência muito boa, com 50 termos da série obtém-se 30 dígitos exatos de π.

Outra fórmula, obtida por volta de 1670, que é por vezes atribuída a Leibniz (1646-1716), mas que parece ter sido descoberta primeiro por James Gregory (1638-1675), e portanto conhecida como fórmula de Gregory-Leibniz é

$$\pi = 4arctg(1) = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{2n+1},$$

que é objeto de nosso estudo.

A Tabela 1 apresenta uma aproximação para π usando as 30 primeiras parcelas da soma.

Tabela 1. Aproximação de π pela série de Gregory-Leibniz

n	$(-1)^n \frac{4}{2n+1}$	$\approx \pi$
0	4,0000000	4,0000000
1	-1,3333333	2,6666667
2	0,8000000	3,4666667
3	-0,5714286	2,8952381
4	0,4444444	3,3396825
5	-0,3636364	2,9760461
6	0,3076923	3,2837384
7	-0,2666667	3,0170717
8	0,2352941	3,2523658
9	-0,2105263	3,0418395
10	0,1904762	3,2323157
11	-0,1739130	3,0584027
12	0,1600000	3,2184027
13	-0,1481481	3,0702546
14	0,1379310	3,2081856
15	-0,1290323	3,0791533
16	0,1212121	3,2003654
17	-0,1142857	3,0860797
18	0,1081081	3,1941878
19	-0,1025641	3,0916237
20	0,0975610	3,1891847
21	-0,0975610	3,0961614
22	0,0888889	3,1850503
23	-0,0851064	3,0999439
24	0,0816327	3,1815766
25	-0,0784314	3,1031452
26	0,0754717	3,1786169
27	-0,0727273	3,1058896
28	0,0701754	3,1760650
29	-0,0677966	3,1082684

O problema desta fórmula é que a convergência se dá de forma muito lenta. Pela tabela acima pode-se observar que a primeira casa decimal de π somente estabiliza-se quando já foram somados 25 termos. Serão necessários 300 termos da série para que a segunda casa decimal seja igual a 4 e 5000 termos somados para obtermos a terceira casa decimal.

Em 1706, John Machin introduziu uma variação da série de Gregory-Leibniz com um aumento significativo da convergência. A idéia de Machin foi utilizar uma expressão da forma

$$arctg\left(\frac{1}{z}\right) = arctg\left(\frac{1}{m}\right) + arctg\left(\frac{1}{n}\right),$$

com z, m e n inteiros. Nesta fórmula $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$ estarão mais próximos de 0 do que $\frac{1}{z}$, e isto garante convergência mais rápida. Machin não só introduziu uma fórmula como também uma idéia que é uma das que ainda hoje é usada, pelos programas de computadores, para calcular os dígitos do π. Ele conseguiu 100 casas decimais de π, desmembrando $arctg(1)$. A fórmula encontrada por Machin é dada por,

$$\frac{\pi}{4} = 4arctg\left(\frac{1}{5}\right) - arctg\left(\frac{1}{239}\right).$$

Após Machin, muitos matemáticos utilizaram-se dessa idéia e centenas de fórmulas foram obtidas por esse processo. As fórmulas obtidas por esse método são conhecidas como fórmulas do tipo Machin. Algumas delas são:

- Euler (1738):

$$\frac{\pi}{4} = arctg\left(\frac{1}{2}\right) + arctg\left(\frac{1}{3}\right);$$

- Strassnitzky:

$$\frac{\pi}{4} = arctg\left(\frac{1}{2}\right) + arctg\left(\frac{1}{5}\right) + arctg\left(\frac{1}{8}\right);$$

- Huton:

$$\frac{\pi}{4} = 2arctg\left(\frac{1}{3}\right) + arctg\left(\frac{1}{7}\right);$$

- Klingenstierna:

$$\frac{\pi}{4} = 8arctg\left(\frac{1}{10}\right) - arctg\left(\frac{1}{239}\right) - 4arctg\left(\frac{1}{515}\right);$$

- Gauss:

$$\frac{\pi}{4} = 12arctg\left(\frac{1}{18}\right) + 8arctg\left(\frac{1}{57}\right) - 5arctg\left(\frac{1}{239}\right);$$

- Stormer:

$$\frac{\pi}{4} = 44arctg\left(\frac{1}{57}\right) + 7arctg\left(\frac{1}{239}\right) - 12arctg\left(\frac{1}{682}\right) + 24arctg\left(\frac{1}{12943}\right);$$

- Sebah:

$$\frac{\pi}{4} = 22arctg\left(\frac{1}{38}\right) + 17arctg\left(\frac{7}{601}\right) + 10arctg\left(\frac{7}{8149}\right).$$

Para se ter uma idéia da convergência, a Tabela 2 mostra uma aproximação de π usando os dez primeiros termos da série de Euler, onde conseguimos 6 casas decimais corretas de π.

Tabela 2. Aproximação de π pela série de Euler

N	$S_1 = \dfrac{(-1)^n 4}{2^{2n+1}(2n+1)}$	$S_2 = \dfrac{(-1)^n 4}{3^{2n+1}(2n+1)}$	$S_1 + S_2$	$\approx \pi$
0	2,0000000000	1,3333333333	3,3333333333	3,3333333333
1	-0,1666666667	-0,0493827160	-0,2160493827	3,1172839506
2	0,0250000000	0,0032921811	0,0282921811	3,1455761317
3	-0,0044642857	-0,0002612842	-0,0047255699	3,1408505618
4	0,0008680556	0,0000225801	0,0008906357	3,1417411974
5	-0,0001775568	-0,0000020527	-0,0001796096	3,1415615879
6	0,0000375601	0,0000001930	0,0000377531	3,1415993410
7	-0,0000081380	-0,0000000186	-0,0000081566	3,1415911844
8	0,0000017952	0,0000000018	0,0000017970	3,1415929813
9	-0,0000004015	-0,0000000002	-0,0000004017	3,1415925796

Apenas como curiosidade citamos outros dois tipos de séries para obter π. O indiano Srinivasa Ramanujan, descobriu em 1914 a impressionante fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

Esta série converge rápido. Ela fornece 8 casas decimais corretas a cada termo adicionado. Em 1987, os irmãos Gregory e David Chudnovsky melhoraram a série de Ramanujan e descobriram

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (6n)!(13591409 + 545140134n)}{(n!)^3 (3n)!\left(640320^3\right)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Uma das melhores séries para obter π, pois converge muito rápido. Cerca de 14 casas decimais corretas a cada termo adicionado.

Em 1997, David Bailey, Peter Borwein e Simon Plouffe contabilizaram 10 bilhões de casas decimais para π, usando a fórmula

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right),$$

que permite calcular em base 16 (e consequentemente em base 2) qualquer um dos dígitos decimais de π sem precisar calcular os dígitos precedentes.

5. Referências

[1] EYMARD, P., LAFON, J. The number π. Editora AMS. 2000. 322 p.

[2] GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. Vol 4. Editora LTC. 3 ed. 1999. 481 p.